Géométrie
Cours de Licence

Bernard Le Stum[1]
Université de Rennes 1

Version du 19 janvier 2004

[1]bernard.le-stum@univ-rennes1.fr

Table des matières

Introduction

Ce cours de géométrie est le fruit de cinq années d'enseignement en licence pluridisciplinaire en sciences et technologie à l'université de Rennes I.

Il s'adresse donc principalement à des étudiants qui on obtenu un Deug à dominante mathématiques mais qui ne souhaitent pas s'engager dans des études longues.

Cela dit, ces étudiants se destinent pour la plupart à l'enseignement. D'autre part, ils aiment, ont aimé ou ont cru aimer les mathématiques. Mme si celles-ci ne leur ont pas toujours rendu la pareille. Pour ces différentes raisons, il m'a semblé important de présenter ce cours avec la plus grande rigueur.

La première partie du cours est consacrée a (re) mettre en place le vocabulaire de base en théorie des ensembles et en algèbre. Il n'y a ni démonstrations, ni exemples, mais quelques exercices. On refait dans la seconde partie (numérotée 1, etc) un cours complet d'algèbre linéaire. le but est de mettre en place les outils nécessaires pour faire de la géométrie élémentaire. Cela peut sembler inutile de répéter ce qui a déjà été vu longuement en Deug. L'expérience montre qu'il n'en est rien.

Le cours consacré a la géométrie proprement dite est découpé en trois parties : géométrie affine, géométrie euclidienne et géométrie projective. L'ordre des 2 dernières parties peut tre inversé. Il n'y a aucune interférence. La partie consacrée a la géométrie affine est coupée en deux. Il y a d'abord l'approche "contemplative" sans calcul. On introduit ensuite la notion de coordonnées affines ou barycentriques. En géométrie euclidienne, seule l'orthogonalité et les distances seront étudiées. On ne parlera pas d'angle.

Chapitre 1

Rappels d'algébre générale

1.1 Ensembles

1.1.1 Définition

On admet les notions d'*ensemble* E et d'*élément* x de cet ensemble comme intuitives. On écrit $x \in E$ et on dit que x *appartient* à E. Deux ensembles sont *égaux* s'ils ont les mêmes éléments. On note $\{a, b, \ldots\}$ l'ensemble dont les éléments sont a, b, …et $\{x, P(x)\}$ l'ensemble des x qui possédent la propriété P.

1.1.2 Définition

On note $\emptyset$ l'*ensemble vide* qui ne contient aucun élément. Un ensemble à un élément est un *singleton*. Un ensemble à deux éléments est une *paire*.

1.1.3 Définition

On dit que E est *contenu*, est une *partie*, est un *sous-ensemble* ou est *inclus*dans F et on écrit $E \subset F$ si tout élément de E est élément de F. Si x n'appartient pas à E, on écrit $x \notin E$. Le *complémentaire* de E est l'ensemble E^c des éléments x tels que $x \notin E$.

1.1.4 Définition

L'*intersection* de deux ensembles E et F est l'ensemble $E \cap F$ des éléments x qui sont à la fois dans E et dans F. L'*union* de ces ensembles est l'ensemble $E \cup F$ des éléments x qui sont dans E, dans F ou dans les deux à la fois. On dit que deux ensembles E et F sont *disjoints* si $E \cap F = \emptyset$.

1.1.5 Proposition

On a toujours

i) $(E^c)^c = E$

ii) $E \cap F = F \cap E, \quad E \cup F = F \cup E$

iii) $(E \cap F)^c = E^c \cup F^c, \quad (E \cup F)^c = E^c \cap F^c$
iv) $(E = F) \Leftrightarrow [(E \subset F)$ et $(F \subset E)]$
v) $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G, \quad E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$
vi) $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G),$
$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$
vii) $(E \subset F \cap G) \Leftrightarrow [(E \subset F)$ et $(E \subset G)]$
viii) $(E \cup F \subset G) \Leftrightarrow [(E \subset G)$ et $(F \subset G)]$.

1.1.6 Définition

L'ensemble $\{\{a, b\}, a\}$ s'appelle le *couple* (a, b). En d'autres termes, il s'agit d'une "paire ordonnée". On définit de même un *triplet*, etc.

1.1.7 Définition

Le *produit cartésien* de deux ensembles E et F est l'ensemble

$$E \times F := \{(x, y), x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

1.1.8 Définition

Une *partition* de E est un ensemble de parties non vides de E, disjointes deux à deux dont l'union (voir 1.3.7Définitionsubsection.1.3.7) est E.

1.2 Relations

1.2.1 Définition

Une *relation* $\mathcal{R} : E \to F$ est un triplet $\mathcal{R} := (E, F, \Gamma)$ ou Γ est un sous ensemble de $E \times F$. On dit que E est la *source*, F le *but* et Γ le *graphe*. Si $(x, y) \in \Gamma$, on écrit $y\mathcal{R}x$. On dit que y est une *image* de x et que x est un *antécédent* de y. Si $F = E$, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation dans E. Le *domaine de définition* de $\mathcal{R}$ est l'ensemble $\mathcal{D}_\mathcal{R}$ de tous les antécédents. L'*image* de $\mathcal{R}$ est l'ensemble $\mathrm{im}\mathcal{R}$ de toutes les images. L'*identité* dans E est la relation $y \; \mathrm{Id}_E \; x \Leftrightarrow x = y$.

1.2.2 Définition

La relation *réciproque* de $\mathcal{R}$ est la relation $\mathcal{R}^{-1}$ de F vers E définie par $y\mathcal{R}^{-1}x \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$. Si $\mathcal{R}$ est une relation de E vers F et $\mathcal{S}$ une relation de F vers G, la relation *composée* $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est définie par

$$z(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})x \Leftrightarrow \exists y \in F, y\mathcal{R}x \text{ et } z\mathcal{S}y.$$

1.2.3 Remarque

On a toujours $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.

1.2.4 Définition

Une relation dans E est *réflexive* si, tout $x \in E$ satisfait $x\mathcal{R}x$. Elle est *symétrique* si $x\mathcal{R}y$ chaque fois que $y\mathcal{R}x$. Elle est *antisymétrique* si $(y\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}y)$ seulement si $y = x$. Elle est *transitive* si chaque fois que $z\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, on a $z\mathcal{R}x$.

1.2.5 Définition

Une relation d'*équivalence* est une relation réflexive, symétrique et transitive. Une relation d'*ordre* est une relation réflexive, antisymétrique et transitive.

1.2.6 Définition

Si $\sim$ est une relation d'équivalence dans E, la *classe* de $x \in E$ est l'ensemble $\overline{x} = \{y \in E, y \sim x\}$. On note E/$\sim$ et on appelle *ensemble quotient* de E par $\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$.

1.2.7 Proposition

Si $\sim$ est une relation d'équivalence dans E, l'ensemble quotient $E/\sim$ est une partition de E.

1.3 Fonctions, applications

1.3.1 Définition

Une *fonction* $f : E \to F$ est une relation de E vers F telle que tout $x \in E$ ait au plus une image y dans F. On écrit alors $y = f(x)$.

1.3.2 Définition

La fonction f est une *application* si $\mathcal{D}_f = E$ (si tout élément de E à une image dans F). Une application

$$f : E \to F$$

est *injective* si deux éléments distincts de E n'ont jamais la même image dans F. Elle est *surjective* si tout élément de F à un antécédent dans E (si $\mathrm{im} f = F$). Elle est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective.

1.3.3 Proposition

i) Si f et g sont deux fonctions, deux applications, deux applications injectives, deux applications surjectives ou deux applications bijectives, alors $g \circ f$ aussi.

ii) Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. On a alors $g = f^{-1}$.

1.3.4 Définition

Les applications
$$E \times F \to E, (x, y) \longmapsto x$$
et
$$E \times F \to F, (x, y) \longmapsto y$$
sont les *projections*.

1.3.5 Définition

L'*image* par une application $f : E \to F$ d'une partie A de E est
$$f(A) := \{f(x), x \in A\}.$$
L'*image inverse* d'une partie B de F est
$$f^{-1}(B) := \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

1.3.6 Proposition

On a toujours

i) Si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$. De plus, on a toujours
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$
et
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B.)$$

ii) Si $A \subset B$, alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. De plus, on a toujours
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$
et
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

iii) On a toujours $f(f^{-1}(A)) \subset A$ et $A \subset f^{-1}(f(A))$.

1.3.7 Définition

Une *famille* d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble I est une application $I \to E$. On la note $(x_i)_{i \in I}$. étant donnée une famille de parties d'un ensemble, on peut définir l'*intersection* et l'*union* de cette famille. On peut aussi définir le *produit* d'une famille d'ensembles.

1.4 Lois de composition

1.4.1 Définition

Une *loi de composition* est une application
$$E \times F \to G, (x, y) \longmapsto xy.$$
Si $E = F = G$, on dit que c'est une *loi de composition interne* dans E.

1.4.2 Définition

Une loi de composition interne sur un ensemble E est *associative* si

$$\forall x, y, z \in E, (xy)z = x(yz) =: xyz.$$

On dit que $1 \in E$ est une *unité* si

$$\forall x \in E, 1x = x1 = x.$$

On parle de *zéro*, noté 0, au lieu d'unité lorsque la loi est notée additivement.

1.4.3 Définition

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et unitaire. La *puissance* n-i-éme de x est définie par récurrence par $x^0 = 1$ et $x^n = x^{n-1}x$. Si la loi est notée additivement, on parle de *multiple* nx.

1.4.4 Remarque

Si $m, n \in \mathbf{N}$ et $x \in E$, alors

$$x^{m+n} = x^m x^n$$

et

$$x^{mn} = (x^m)^n.$$

1.4.5 Définition

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et unitaire. On dit que $x^{-1} \in E$ est un *inverse* pour $x \in E$ si $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. Lorsque la loi est notée additivement on parle d'*opposé* $-x$ de x.

1.4.6 Remarque

L'élément x^{-1} est alors unique et si $n \in \mathbf{N}$, on pose $x^{-n} = (x^{-1})^n$.

1.4.7 Proposition

i) On a toujours $(x^{-1})^{-1} = x$.
ii) Si $x, y \in E$ possédent des inverses, alors xy aussi et $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.
iii) Si $m, n \in \mathbf{Z}$ et $x \in E$ posséde un inverse, alors $x^{m+n} = x^m x^n$ et $x^{mn} = (x^m)^n$.

1.5 Groupes

1.5.1 Définition

Un *groupe* est un ensemble G muni d'une loi interne associative possédant une unité et telle que tout élément posséde un inverse.

1.5.2 Définition

Si G et H sont deux groupes, un *homomorphisme*

$$f : G \to H$$

est une application telle que

$$\forall x, y \in G, f(xy) = f(x)f(y).$$

On dit *endomorphisme* si $G = H$, *isomorphisme* si f est bijective et *automorphisme* si ces deux conditions sont réunies.

1.5.3 Proposition

i) Si f est un homomorphisme de groupes, on a $f(1) = 1$ et si $x \in G$ et $n \in \mathbf{Z}, f(x^n) = f(x)^n$.

ii) Si $f : G \to H$ et $g : H \to K$ sont deux homomorphismes, il en va de même de $g \circ f$.

iii) Si $f : G \to H$ est un isomorphisme, alors f^{-1} est un homomorphisme de groupes.

1.5.4 Définition

Un *sous groupe* de G est un sous ensemble non vide H de G tel que si $x, y \in H$ alors $xy^{-1} \in H$. Le *noyau* d'un homomorphisme de groupes $f : G \to H$ est

$$\ker f := f^{-1}(1).$$

1.5.5 Proposition

i) Si H est un sous groupe de G, la loi de G induit sur H une structure de groupe et l'inclusion de H dans G est un homomorphisme.

ii) L'image et l'image inverse d'un sous-groupe par un homomorphisme de groupes sont des sous-groupes.

iii) Le noyau d'un homomorphisme $f : G \to H$ est un sous groupe de G et son image est un sous groupe de H.

iv) Un homomorphisme est injectif si et seulement si son noyau est trivial (réduit à 1).

1.5.6 Proposition

Toute intersection de sous-groupes est un sous-groupe. Il existe un plus petit sous groupe H contenant une partie donnée S d'un groupe G, c'est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant S.

1.5.7 Définition

On dit alors que H est le *sous-groupe engendré* par S ou que S est un *ensemble de générateurs* de H.

1.6 Permutations

1.6.1 Proposition

Si E est un ensemble, l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des bijections de E vers E est un groupe pour $\circ$.

1.6.2 Définition

On dit que $\mathcal{S}_n := \mathcal{S}(\{1, \ldots, n\})$ est le *groupe symétrique* ou groupe des *permutations*. Le *support* de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est $\{i, \sigma(i) \neq i\}$. étant donnés $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ tous distincts, on définit le *cycle* $(i_1, \ldots, i_k)$ comme la permutation σ de support $\{i_1, \ldots, i_k\}$ définie par

$$\begin{cases} \sigma(i_1) & = & i_2 \\ \sigma(i_2) & = & i_3 \\ \vdots & = & \vdots \\ \sigma(i_{k-1}) & = & i_k \\ \sigma(i_k) & = & i_1 \end{cases}$$

On dit que k est la *longueur* du cycle. Un cycle de longueur 2 est une *transposition*. On dit que 2 cycles sont *disjoints* si leurs supports le sont.

1.6.3 Proposition

i) Toute permutation s'écrit de maniére unique comme produit de cycles disjoints.

ii) $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions.

iii) Il existe un unique homomorphisme de groupes

$$\epsilon := \mathcal{S}_n \to \{\pm 1\}$$

tel que $\epsilon(\sigma) = -1$ si σ est une transposition.

iv) Si σ est un cycle de longueur k, alors $\epsilon(\sigma) = (-1)^{k+1}$.

1.6.4 Définition

On dit que $\epsilon(\sigma)$ est la *signature* de σ. Le noyau de la signature est le *groupe alterné* $\mathcal{A}_n$.

1.7 Action de groupe

1.7.1 Définition

Une *action (à gauche)* d'un groupe G sur un ensemble E est une loi de composition externe

$$G \times E \to E, (g, x) \longmapsto gx$$

telle que

a) pour tout $x \in E, 1x = x$

b) pour tous $g, h \in G$ et $x \in E, (gh)x = g(hx)$.

1.7.2 Définition

Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Si $x \in E$ on dit que

$$Gx := \{y \in E, \exists g \in G, y = gx\}$$

est l'*orbite* de x et que

$$G_x := \{g \in G, gx = x\}$$

est le *stabilisateur* de x.

1.7.3 Proposition

Si G agit sur E, alors la relation

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G, y = gx$$

est une relation d'équivalence sur E. La classe de x est tout simplement l'orbite de x

1.7.4 Définition

On dit que l'action de G sur E est *simple* (resp. *transitive*) si tous les stabilisateurs sont égaux à 1 (resp. toutes les orbites sont égales à E). Si les deux conditions sont réunies, on dit que l'action est *simplement transitive*.

1.7.5 Proposition

L'action est simplement transitive si et seulement si pour tout $x, y \in E, \exists g$ unique, $y = gx$.

1.8 Groupes commutatifs

1.8.1 Définition

Une loi de composition interne sur un ensemble E est *commutative* si pour tout $x, y \in E$, on a $xy = yx$.

1.8.2 Remarque

Si E est un ensemble muni d'une loi de composition interne commutative, associative et unitaire, on a pour tout $x, y \in E$ et $n \in \mathbf{N}$, $(xy)^n = x^n y^n$.

1.8.3 Définition

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne commutative, associative et unitaire. Si y est inversible on définit le *quotient* $x/y := xy^{-1}$. Lorsque la loi est notée additivement, on parle de la *différence* $x - y$.

1.8.4 Définition

Un groupe dont la loi est commutative est un *groupe commutatif*. La loi est généralement notée additivement.

1.8.5 Remarques

i) Dans un groupe commutatif G, on a

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \forall x, y \in G, n(x+y) = nx + ny.$$

ii) Si $f : G \to H$ est un homomorphisme entre deux groupes commutatifs, on

$$\forall x, y \in G, f(x-y) = f(x) - f(y).$$

iii) Un sous groupe d'un groupe commutatif est commutatif.

1.9 Anneaux

1.9.1 Définition

Un *anneau* est un groupe commutatif A, dont la loi est notée additivement, muni d'une seconde loi interne associative et unitaire, notée multiplicativement, qui est *distributive* sur la premiére :

$$\forall x, y, z \in A, x(y+z) = xy + xz \text{ et } (x+y)z = xz + yz.$$

1.9.2 Proposition

Si A est un anneau, alors l'ensemble A^* des inversibles de A est un groupe.

1.9.3 Définition

Un *homomorphisme d'anneaux* $f : A \to B$ est un homomorphisme de groupes tel que l'on ait toujours

$$f(xy) = f(x)f(y) \text{ et } f(1) = 1.$$

C'est un *isomorphisme* s'il est bijectif.

1.9.4 Proposition

Si $f : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux, alors f induit un homomorphisme de groupes $A^* \to B^*$.

1.9.5 Définition

Un anneau est dit *commutatif* si la multiplication est commutative. Un anneau commutatif A est *intégre* s'il satisfait

$$xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0).$$

Un *corps* K est un anneau commutatif dans lequel tout élément non nul posséde un inverse.

1.9.6 Définition

La *caractéristique* d'un corps K est le plus petit nombre premier p tel que $px = 0$ pour tout $x \in K$, s'il existe et 0 sinon.

1.9.7 Définition

Une *algèbre (centrale)* sur un corps K est un espace vectoriel (voir chapitre suivant) sur K muni d'une seconde loi qui en fait un anneau et tel que l'on ait toujours $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$. Un *homomorphisme d'algébres* est un homomorphisme d'anneaux qui est en même temps une application linéaire. C'est un *isomorphisme* s'il est bijectif.

1.10 Exercices

Exercice 1 *Démontrer la proposition 1.3.6Propositionsubsection.1.3.6. Pour les inclusions, trouver des contre-exemples aux inclusions réciproques.*

Exercice 2 *Montrer qu'un groupe qui a au plus* 5 *éléments est toujours commutatif.*

Exercice 3 *Vrai ou faux : dans un groupe, si* $ab = ac$*, alors* $b = c$ *? Et dans un anneau ?*

Exercice 4 *Soit* A *un anneau. On dit que* $p \in A$ *est un* projecteur *si* $p^2 = p$*. Montrer que* p *est un projecteur si et seulement s'il existe* q *tel que* $p + q = 1$ *et* $pq = 0$*. Montrer qu'alors* q *est aussi un projecteur et que* $qp = 0$*.*

Exercice 5 *Soit* A *un anneau. On dit que* $s \in A$ *est une* symétrie *d'échelon* 2 *si* $s^2 = 1$*. On suppose que* 2 *est inversible dans* A*. Montrer que* s *est une symétrie si et seulement si* $p = \frac{s+1}{2}$ *est un projecteur si et seulement si* $q := \frac{1-s}{2}$ *est un projecteur.*

Exercice 6 *Soit* A *un anneau et* $x \in A$*. Montrer que*

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^r) = 1 - x^{r+1}.$$

Exercice 7 *Démontrer la proposition 1.6.3Propositionsubsection.1.6.3.*

Exercice 8 *Montrer que* $\mathcal{S}_n$ *est engendré par les transpositions de la forme* $(1, i)$ *pour* $i = 2, \ldots, n$*.*

Exercice 9 *Montrer que* $\mathcal{S}_n$ *est engendré par les transpositions de la forme* $(i, i+1)$ *pour* $i = 1, \ldots, n-1$*.*

Exercice 10 *Montrer que* $\mathcal{S}_n$ *est engendré par* $(1, 2)$ *et* $(1, 2, \ldots, n)$*.*

Exercice 11 *Montrer que* $\mathcal{A}_n$ *est engendré par les cycles de longueur* 3*.*

Exercice 12 *écrire comme produit de cycles disjoints, comme produit de transpositions, puis calculer la signature :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \textit{ et } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 8 & 9 & 4 & 6 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

Exercice 13 *Montrer que* $\mathcal{S}_3$ *est engendré par*

$$\sigma := (1, 2) \textit{ et } \tau := (1, 2, 3).$$

Déterminer tous les sous-groupes de $\mathcal{S}_3$*.*

Exercice 14 *Montrer que* $GL_2(\mathbf{R})$ *agit (de maniére évidente) sur* $\mathbf{R}^2$*. Déterminer l'orbite et le stabilisateur de (0, 1).*

Exercice 15 *Soit*

$$G := \{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}, a, b, d \in \mathbf{R}, ad \neq 0\}.$$

Montrer que G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbf{R})$ et que l'application

$$(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}, x) \mapsto \frac{ax+b}{d}$$

définit une action de G sur $\mathbf{R}$. Quels sont l'orbite et le stabilisateur de 0 ?

Exercice 16 *Soit G le sous-groupe de $GL_2(\mathbf{R})$ qui laisse invariant le carré*

$$C := \{(x, y), (|x| = 1 \text{ ou } |y| = 1) \text{ et } |x|, |y| \leq 1)\}.$$

Montrer que G est engendré par la rotation σ d'angle $\frac{\pi}{2}$ et la symétrie τ par rapport à l'axe des abscisses. Trouver tous les sous-groupes de G. Déterminer les orbites et les stabilisateurs pour l'action de G sur C.

Chapitre 2

Algébre Linéaire

On fixe un corps de base K qui sera toujours $\mathbf{R}$ en pratique. On pourra aussi ne considérer que des espaces de dimension finie lorsque l'on saura ce que cela signifie.

2.1 Espaces vectoriels et sous-espaces

2.1.1 Définition

Un *espace vectoriel* sur un corps K est un groupe commutatif E muni d'une loi externe

$$K \times E \to E, (\lambda, u) \longmapsto \lambda u$$

telle que

a) si $u \in E$, alors $1u = u$,

b) si $u \in E$ et $\lambda, \mu \in K$, alors $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$,

c) si $u \in E$ et $\lambda, \mu \in K$, alors $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$

d) si $u, v \in E$ et $\lambda \in K$, alors $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

2.1.2 Proposition

i) Si $u \in E$ et $\lambda \in K$, alors

$$\lambda u = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } u = 0),$$

ii) si $u \in E$ et $\lambda \in K$, alors $\lambda(-u) = (-\lambda)u = -(\lambda u)$,

iii) si $u, v \in E$ et $\lambda \in K$, alors $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$,

iv) si $u \in E$ et $\lambda, \mu \in K$, alors $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$,

v) si $u, v \in E$ et $\lambda \in K^*$ sont tels que $\lambda u = \lambda v$, alors $u = v$

vi) si $u \in E$ et $n \in \mathbf{Z}$, alors $nu = (n1)u$.

Démonstration : On a

$$0u = (0 + 0)u = 0u + 0u$$

et donc $0u = 0$. On montre de mme que $\lambda 0 = 0$. Réciproquement, supposons que $\lambda u = 0$ avec $\lambda \neq 0$. Alors,

$$u = 1u = (\lambda^{-1}\lambda)u = \lambda^{-1}(\lambda u) = \lambda^{-1}0 = 0.$$

D'o la premiére assertion.

On a

$$\lambda u + \lambda(-u) = \lambda(u + (-u)) = \lambda 0 = 0$$

et donc $\lambda(-u) = -(\lambda u)$. On démontre de mme que $(-\lambda)u = -(\lambda u)$ et on obtient la seconde assertion.

On en déduit facilement les trois assertions suivantes.

Enfin, pour la derniére assertion, on procéde tout d'abord par récurrence sur n pour $n0$. Le cas $n = 0$ est trivial et si $nu = (n1)u$, on a bien

$$(n+1)u = nu + u = (n1)u + 1u = (n1+1)u = ((n+1)1)u.$$

Pour $n < 0$, on a

$$nu = -(|n|u) = -((|n|1)u) = (-(|n|1))u = (n1)u.$$

2.1.3 Définition

Un *sous espace vectoriel* d'un espace vectoriel E est un sous groupe additif F de E tel que si $\lambda \in K$ et $u \in F$, alors $\lambda u \in F$.

2.1.4 Remarque

i) Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors l'addition et la multiplication par les scalaires font de F un espace vectoriel sur K.

ii) Un sous ensemble F de E est un sous espace vectoriel si et seulement si $0 \in F$ et si lorsque $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in K$, on a $\lambda u + \mu v \in F$.

2.2 Applications linéaires

2.2.1 Définition

Une application $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels sur K est *linéaire* si c'est un homomorphisme de groupes additifs et si pour $\lambda \in K$ et $u \in E$, alors $f(\lambda u) = \lambda f(u)$. Leur ensemble se note $L(E, F)$. Si $F = E$, on dit que f est un *endomorphisme* de E (ou un *opérateur* sur E) et on note $L(E)$ leur ensemble. Si $F = K$, on dit que f est une *forme linéaire* sur E et on note $\check{E}$ leur ensemble. Une application linéaire bijective est un *isomorphisme*. Un endomorphisme qui est aussi un isomorphisme est un *automorphisme*. Leur ensemble se note $GL(E)$. Enfin, une *homothétie* est une application de E dans lui mme de la forme $u \longmapsto ku$ avec $k \neq 0, 1$.

2.2.2 Remarque

i) L'application f est linéaire si et seulement si

$$\forall u, v \in E, \lambda, \mu \in K, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

ii) Une homothétie est un automorphisme.

2.2.3 Proposition

i) Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, alors gof est aussi linéaire.

ii) Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors f^{-1} aussi.

Démonstration : La premiére assertion se vérifie aisément. La seconde n'est pas beaucoup plus difficile. On sait déjà que f^{-1} est un homomorphisme de groupes. De plus, puisque f est injective, on déduit de

$$f(\lambda f^{-1}(u)) = \lambda f(f^{-1}(u)) = \lambda u = f(f^{-1}(\lambda u))$$

que $\lambda f^{-1}(u)) = f^{-1}(\lambda u))$.

2.2.4 Proposition

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors,

i) Si G est un sous-espace vectoriel de E, $f(G)$ est est un sous-espace vectoriel de F.

ii) Si G est un sous-espace vectoriel de F, $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E.

iii) $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

iv) f est injective si et seulement si $\ker f = 0$ et f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$

Démonstration : Les deux premiéres assertions se démontrent de la mme maniére. Considérons par exemple la seconde.

On sait déjà que $f^{-1}(G)$ est un sous-groupe de F. De plus, si $f(u) \in G$ et $\lambda \in K$, alors $f(\lambda u) = \lambda f(u) \in G$.

Le reste découle des deux premiéres assertion et de ce qu'on sait déjà sur les groupes.

2.2.5 Proposition

i) Si E est un espace vectoriel et A un ensemble, l'ensemble E^A des applications de A dans E est un espace vectoriel si on le munit de

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) \text{ et } (\lambda f)(a) = \lambda f(a).$$

ii) *L'ensemble* $L(E,F)$ *est un sous-espace vectoriel de* F^E.

iii) *L'espace vectoriel* $L(E)$ *est une algébre pour la composition.*

iv) *L'ensemble GL(E) est un groupe pour la composition.*

v) *L'application qui à* $\lambda \in K$ *associe la multiplication par* λ *dans* E *est un homomorphisme injectif d'algébres de* K *vers* $L(E)$ *dont l'image est formé des homothéties, de l'identité et de l'application nulle. En particulier, on obtient un homomorphisme de groupes de* K^* *vers* $GL(E)$.

Démonstration : On vérifie aisément la premiére assertion.

Pour la seconde, il faut s'assurer que l'application nulle est linéaire, ce qui est clair, que si f et g sont linéaires $f+g$ aussi et que si f est linéaire, alors pour tout λ, λf est linéaire. Vérifions par exemple la derniére propriété. On doit montrer que l'on a toujours

$$(\lambda f)(u+v) = (\lambda f)(u) + (\lambda f)(v)$$

ainsi que

$$(\lambda f)(\mu u) = \mu(\lambda f)(u).$$

Or par définition, on a

$$(\lambda f)(u+v) = \lambda f(u+v) = \lambda(f(u)+f(v)) =$$

$$\lambda f(u) + \lambda f(v) = (\lambda f)(u) + (\lambda f)(v).$$

Et de mme pour l'autre égalité.

On s'attaque maintenant à la troisiéme assertion. On sait déjà que $L(E)$ est un espace vectoriel. Il faut montrer que c'est un anneau et la propriété $(\lambda f)\circ g = \lambda(f\circ g)$. Comme on a toujours

$$f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$$

et

$$f\circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E\circ f = f,$$

pour avoir un anneau il faut seulement s'assurer que

$$(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$$

et que

$$f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h.$$

Les vérifications sont laissées en exercice.

La quatriéme assertion résulte de la précédente car $GL(E)$ est le groupe des inversibles de $L(E)$.

Enfin, l'application de la derniére assertion n'est autre que $\lambda \mapsto \lambda \mathrm{Id}_E$. On vérifie que c'est un homomorphisme d'algébres. En effet, on a toujours

$$(\lambda+\mu)\mathrm{Id}_E = \lambda\mathrm{Id}_E + \mu\mathrm{Id}_E,$$

$$(\lambda\mu)\mathrm{Id}_E = \lambda(\mu\mathrm{Id}_E) = \lambda\mathrm{Id}_E\circ\mu\mathrm{Id}_E$$

et enfin

$$1.\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E.$$

Le reste est clair.

2.3 Sommes directes

2.3.1 Proposition

Si E et F sont deux espaces vectoriels, les lois sur $E \times F$ définies par

$$(u, v) + (u', v') := (u + u', v + v')$$

et

$$\lambda(u, v) := (\lambda u, \lambda v)$$

font de $E \times F$ un espace vectoriel et les projections $E \times F \to E$ et $E \times F \to F$ sont des applications linéaires.

Démonstration : Cela se vérifie aisément.

2.3.2 Proposition

Soient E_1 et E_2 deux sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Alors,

i) L'ensemble

$$E_1 + E_2 = \{u + v, u \in E_1 \text{ et } v \in E_2\}$$

est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant E_1 et E_2.

ii) L'ensemble $E_1 \cap E_2$ est le plus grand sous-espace vectoriel de E contenu dans E_1 et E_2.

iii) L'application

$$\Phi : E_1 \times E_2 \to E, (u, v) \longmapsto u + v$$

est linéaire et son image est $E_1 + E_2$.

iv) L'application

$$E_1 \cap E_2 \to E_1 \times E_2, u \longmapsto (u, -u)$$

induit un isomorphisme de $E_1 \cap E_2$ sur $\ker \Phi$.

Démonstration : On vérifie d'abord la troisiéme assertion. La linéarité de l'application Φ est immédiate et son image est par définition $E_1 + E_2$.

En particulier, on voit que que $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus, il contient bien E_1 et E_2. D'autre part, il est clair que tout sous-espace vectoriel contenant E_1 et E_2 contient aussi E_1+E_2. La premiére assertion est ainsi démontrée.

De mme, pour la seconde assertion, on vérifie que $E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de E. Et c'est la plus petite partie de E contenue dans E_1 et E_2.

Finalement, l'application

$$E_1 \cap E_2 \to E_1 \times E_2, u \longmapsto (u, -u)$$

est évidemment linéaire et son image est formée des couples (u, v) avec $u \in E_1, v \in E_2$ et $u + v = 0$, c'est à dire $\ker \Phi$.

2.3.3 Proposition

Soient E_1 et E_2 deux sous-espace vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Tout élément de E s'écrit de maniére unique sous la forme $u + v$ avec $u \in E_1$ et $v \in E_2$.

ii) On a $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = 0$

iii) L'application $E_1 \times E_2 \to E, (u, v) \longmapsto u + v$ est un isomorphisme.

Démonstration : On fait une démonstration circulaire.

Il est clair que la premiére condition implique

$$E = E_1 + E_2.$$

De plus, sous cette condition, si $u \in E_1 \cap E_2$, on a

$$u + (-u) = 0 + 0$$

et l'unicité implique que $u = 0$.

La seconde condition implique la troisiéme grce à la proposition précédente.

Enfin, si la troisiéme condition est satisfaite, alors Φ est bijective et la premiére condition en découle.

2.3.4 Définition

On dit alors que E_1 et E_2 sont *supplémentaires* ou que E est *somme directe* de E_1 et E_2 et on écrit $E = E_1 \oplus E_2$.

2.3.5 Remarque

Si $E = E_1 \oplus E_2$, on dispose de maniére évidente de projections $E \to E_1$ et $E \to E_2$ qui sont des applications linéaires surjectives de noyaux respectifs E_2 et E_1.

2.3.6 Remarque

Ces résultats s'étendent sans difficulté à un nombre fini de sous-espaces. En particulier, on pourra considérer l'espace $K^n = K \times \cdots \times K$.

2.4 Systémes générateurs et libres

2.4.1 Définition

Si $u_1, \ldots, u_n \in E$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, on dit que

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

est une *combinaison linéaire* de $u_1, \ldots, u_n$ et que

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$$

sont les *coefficients*.

2.4.2 Proposition

Une partie non-vide de E est un sous-espace vectoriel si et seulement si elle est stable par combinaison linéaire. Une application est linéaire si et seulement si elle préserve les combinaisons linéaires.

Démonstration : Les conditions sont clairement suffisantes. Et on démontre aisément par récurrence sur n que celles-ci sont nécessaires.

2.4.3 Proposition

i) *Toute intersection de sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.*
ii) *Si $\mathcal{S}$ est une partie de E, il existe un plus petit sous-espace vectoriel F de E contenant $\mathcal{S}$: C'est l'intersection des sous-espace vectoriels contenant $\mathcal{S}$. C'est aussi l'ensemble des combinaisons linéaire d'éléments de $\mathcal{S}$.*

Démonstration : La premiére assertion se vérifie aisément. L'existence et la premiére caractérisation d'un plus petit sous-espace vectoriel contenant une partie $\mathcal{S}$ donnée en résultent formellement. Il reste à montrer la derniére assertion. Le plus simple est de remarquer que l'ensemble F des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel. Il contient $\mathcal{S}$ et il résulte de la proposition précédente que c'est le plus petit.

2.4.4 Définition

On dit alors que F est le *sous espace engendré* par $\mathcal{S}$ ou que $\mathcal{S}$ est un *systéme générateur* de F.

2.4.5 Proposition

Soit $\mathcal{G}$ un systéme générateur de E et $f : E \to F$ linéaire. Alors $f(\mathcal{G})$ est un systéme générateur de $\mathrm{Im} f$.

Démonstration : On sait que $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F qui contient $f(\mathcal{G})$. De plus, il est clair que tout élément de $\mathrm{Im} f$ est combinaison linéaire d'éléments de $f(\mathcal{G})$.

2.4.6 Proposition

Si $u_1, \ldots, u_n \in E$, alors l'application

$$\phi : K^n \to E, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

est linéaire. De plus, l'ensemble $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est générateur si et seulement si ϕ est surjective.

Démonstration : La vérification de la premiére assertion est laissée en exercice. Dire que ϕ est surjective signifie que tout élément de E est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$ et donc que ceux-ci forment un systéme générateur.

2.4.7 Définition

On dit que $u_1, \ldots, u_n \in E$ sont *linéairement dépendants* si il existe $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in K$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0.$$

Sinon, on dit que $u_1, \ldots, u_n$ sont *linéairement indépendants*. Une partie $\mathcal{S}$ de E est un *systéme libre* si pour tous $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{S}$ distincts, $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendants. Sinon, on dit que $\mathcal{S}$ est *lié*.

2.4.8 Proposition

i) Soit $\mathcal{L}$ une partie libre de E et $f : E \to F$ linéaire et injective. Alors, $f(\mathcal{L})$ est un systéme libre de F.

ii) Des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendants si et seulement si l'application

$$\phi : K^n \to E, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

est injective.

Démonstration : Pour la premiére assertion, on remarque que si $f(\mathcal{L})$ est lié, on peut trouver une combinaison linéaire non-triviale nulle

$$\lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n) = 0$$

avec $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{L}$ et $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ distincts. Comme f est injective, les $u_1, \ldots, u_n$ aussi sont distincts. Comme f est linéaire, on a

$$f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = 0.$$

Et l'injectivité de f à nouveau nous dit que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0.$$

On a donc une combinaison linéaire non-triviale nulle d'éléments distincts de $\mathcal{L}$. Contradiction.

Pour ce qui concerne la seconde assertion, dire que ϕ est injective signifie que son noyau est nul, c'est à dire que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

2.5 Bases

2.5.1 Définition

Une *base* d'un espace vectoriel est un systéme libre et générateur.

2.5.2 Proposition

Le systéme $\mathcal{S}$ est une base de E si et seulement si tout élément de E s'écrit de maniére unique comme combinaison linéaire d'éléments distincts de $\mathcal{S}$.

Démonstration : Si $\mathcal{S}$ est une base, c'est un systéme générateur et donc tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{S}$. De plus, si on peut écrire

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

et

$$u = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n$$

avec $u_1, \cdots, u_n$ distincts, alors

$$(\lambda_1 - \mu_1)u_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)u_n = 0.$$

Le fait que $\mathcal{S}$ est libre entrane que

$$\lambda_1 - \mu_1 = \cdots = \lambda_n - \mu_n = 0$$

et on a donc

$$\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_n = \mu_n.$$

Réciproquement, notre condition implique trivialement que $\mathcal{S}$ est générateur et il faut s'assurer qu'il est libre. Or, si

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0,$$

alors, comme on peut aussi écrire

$$0u_1 + \cdots + 0u_n = 0,$$

on a nécessairement

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

2.5.3 Définition

Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de E et

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n,$$

on dit que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les *composantes* de u. En particulier, les composantes du vecteur $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ dans la base $\{1_1, \ldots, 1_n\}$ sont $x_1, \ldots, x_n$ (on rappelle que 1_i est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf la i-éme).

2.5.4 Proposition

i) Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $f : E \to F$ un isomorphisme. Alors, $f(\mathcal{B})$ est une base de F.

ii) L'ensemble $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de E si et seulement si l'application

$$\phi : K^n \to E, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \to \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

est un isomorphisme.

iii) Soient $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de E et

$$v_1, \ldots, v_n \in F.$$

Alors, il existe une unique application linéaire

$$f : E \to F$$

telle que

$$f(u_1) = v_1, \ldots, f(u_n) = v_n.$$

De plus, $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants (resp. générateurs, resp. forment une base de F si et seulement si f est injective, (resp. surjective, resp. bijective).

Démonstration : A part la réciproque de la premiére assertion (laissée en exercice) et la premiére partie de la derniére assertion, tout ceci résulte de nos résultats sur les parties libres et sur les parties génératrices.

On se donne donc une base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de E et

$$v_1, \ldots, v_n \in F.$$

Soit $f : E \to F$ une application linéaire telle que

$$f(u_1) = v_1, \ldots, f(u_n) = v_n.$$

Tout $u \in E$ s'écrit de maniére unique

$$u =: \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

et on a donc

$$f(u) =: \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

D'o l'unicité. Réciproquement, on peut toujours définir f comme ceci et vérifier qu'elle est bien linéaire (on peut pour cela utiliser la deuxiéme assertion).

2.5.5 Théoréme (Théoréme de la base incompléte)

Si $\mathcal{L}$ est un systéme libre contenu dans un systéme générateur $\mathcal{G}$, il existe une base $\mathcal{B}$ de E contenue dans $\mathcal{G}$ et contenant $\mathcal{L}$.

Démonstration : On peut supposer que $E \neq 0$ et on considére l'ensemble des systémes libres contenus dans $\mathcal{G}$ qui contiennent $\mathcal{L}$. Et on lui applique le lemme de Zorn : comme, trivialement, toute union croissante de systémes libre est libre, il existe un systéme libre maximal $\mathcal{B}$ contenu dans $\mathcal{G}$ et contenant $\mathcal{L}$. Montrons que $\mathcal{B}$ est une base. Comme $\mathcal{G}$ est générateur, il suffit de montrer que tout élément $u \in \mathcal{G}$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$. La maximalité de $\mathcal{B}$ implique que, soit $u \in \mathcal{B}$ auquel cas on a gagné, soit $\mathcal{B} \cup \{u\}$ est lié. Dans ce dernier cas, on peut trouver une combinaison linéaire non triviale nulle

$$\lambda u + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0$$

avec $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{B}$ distincts. Comme $\mathcal{B}$ est libre, on ne peut pas avoir $\lambda = 0$. On voit donc que

$$u = -\frac{\lambda_1}{\lambda} u_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda} u_n.$$

2.5.6 Corollaire

i) *Tout espace vectoriel posséde une base.*

ii) *Tout systéme générateur contient une base.*

iii) *Tout systéme libre est contenu dans une base.*

iv) *Tout sous-espace vectoriel de E posséde un supplémentaire dans E.*

Démonstration : Seule la derniére assertion nécessite vraiment une démonstration. On se donne donc un sous-espace vectoriel F de E, on choisit une base $\mathcal{C}$ de F et on la compléte en une base $\mathcal{B}$ de E. On note $\mathcal{D} := \mathcal{B} \backslash \mathcal{C}$ et G le sous-espace engendré par $\mathcal{D}$. Il faut montrer que $E = F \oplus G$. Or tout $u \in E$ s'écrit de maniére unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$, c'est à dire comme somme d'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{C}$ et d'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{D}$. Donc tout élément de E s'écrit bien de maniére unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

2.6 Dimension

2.6.1 Proposition

Deux bases d'un mme espace vectoriel ont mme nombre d'éléments (fini ou infini).

Démonstration : On peut supposer que l'espace E posséde une base finie $\{u_1, \ldots, u_n\}$ et on procéde par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est évident.

On montre maintenant que si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille libre de E, alors c'est une base. On peut écrire, pour chaque $i = 1, \ldots, n$,

$$v_i =: \lambda_{i1}u_1 + \cdots + \lambda_{in}u_n$$

et on pose $v'_i = v_i - \lambda_{in}u_n$. On considére alors le sous espace F de E engendré par $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$. Par récurrence, le systéme $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ n'est pas contenu dans une base et est donc lié. On peut donc trouver une combinaison linéaire non-triviale nulle

$$\mu_1 v'_1 + \cdots + \mu_n v'_n = 0.$$

En posant

$$\lambda := \mu_1\lambda_{1n} + \cdots + \mu_n\lambda_{nn},$$

on obtient

$$\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n = \lambda u_n.$$

Comme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre, on a $\lambda \neq 0$ et on peut écrire u_n comme combinaison linéaire de $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Par symétrie, il en va de mme pour $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$. Et il suit que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de E.

La conclusion est alors formelle : soit $\mathcal{B}$ une autre base de E. Si celle-ci a au plus $n-1$ éléments, on conclut par récurrence. Inversement, si elle a au moins $n+1$ éléments, elle contient une famille libre à n éléments. Parce qui précéde, c'est une base avec laquelle on peut écrire une relation linéaire non triviale dans $\mathcal{B}$.

2.6.2 Définition

Le nombre d'éléments n d'une base de E est la *dimension* de E. On écrit $\dim E = n$. Un espace de dimension 1 (resp. 2) est *une droite* (resp. *un plan*).

2.6.3 Proposition

i) Si $\dim E = n$, alors toute base a n éléments, tout systéme générateur a au moins n éléments et tout systéme libre a au plus n éléments.

ii) Si $\dim E = n < \infty$ et $\sharp\mathcal{S} = n$, alors $\mathcal{S}$ est libre si et seulement si $\mathcal{S}$ est une base si et seulement si $\mathcal{S}$ est générateur.

iii) Soit $f : E \to F$ linéaire. Alors, si f est injective (resp. surjective, resp. bijective), on a

$$\dim E \leq \dim F$$

$$(\text{resp. } \dim F \leq \dim E,$$

$$\text{resp. } \dim E = \dim F).$$

iv) Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors

$$\dim F \leq \dim E.$$

Si $\dim F = \dim E < \infty$, alors $E = F$.

Démonstration : Ce sont des conséquences immédiates de résultats que nous connaissons déjà.

2.6.4 Remarque

Si E est un espace vectoriel, une application linéaire $f : E \to E$ est une homothétie ou l'identité si et seulement si pour toute droite $D \in E$, on a $f(D) = D$

2.6.5 Définition

Le *rang*, rg$\mathcal{S}$, d'un systéme $\mathcal{S}$ est la dimension de l'espace engendré par ce systéme. Le *rang*, rg$f$, d'une application linéaire f est la dimension de Imf.

2.6.6 Proposition (Théoréme du rang)

Si $f : E \to F$ est linéaire, alors

$$\dim E = \dim \ker f + \mathrm{rg} f.$$

Démonstration : Si $\dim \ker f = \infty$, l'égalité est claire. Sinon, on choisit une base $\{u_1, \ldots, u_r\}$ de $\ker f$ et on la prolonge en une suite $u_1, \ldots, u_n$ d'éléments de E. Posons

$$v_{r+1} := f(u_{r+1}), \ldots, v_n := f(u_n).$$

Supposons que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre. Si

$$\lambda_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

alors

$$f(\lambda_{r+1} u_{r+1} + \cdots + \lambda_n u_n) = 0$$

et on peut donc écrire

$$\lambda_{r+1} u_{r+1} + \cdots + \lambda_n u_n = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r.$$

Il suit que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

et en particulier que $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ est libre.

De mme, si on suppose que $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ est libre et si

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0,$$

alors

$$\lambda_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \lambda_n v_n = 0$$

si bien que

$$\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0.$$

On a donc $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r = 0$ et donc aussi

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0.$$

Il suit que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre. La conclusion est alors immédiate.

2.6.7 Proposition (Relation de Grassman)

Si E_1 et E_2 sont deux sous-espace vectoriel de E, alors

$$\dim E_1 + \dim E_2 = \dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2).$$

Démonstration : Résulte du théoréme du rang une fois que l'on a remarqué que

$$\dim E_1 \times E_2 = \dim E_1 + \dim E_2.$$

2.6.8 Corollaire

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors

$$E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dim E = \dim E_1 + \dim E_2 \\ E_1 \cap E_2 = 0. \end{cases}$$

2.6.9 Proposition

i) Si $\dim E < \infty$ et f est un endomorphisme de E, alors f est injective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est bijective.

ii) Si $\dim E = \dim F < \infty$, alors E et F sont isomorphes.

iii) Soient $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de E et

$$v_1, \ldots, v_n \in F.$$

Alors, le rang de l'application linéaire $f : E \to F$ telle que

$$f(u_1) = v_1, \ldots, f(u_n) = v_n$$

est égal au rang du systéme $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

La démonstration est laissée en exercice.

2.7 Matrices

Dans cette section, on ne considére que des espaces vectoriels de dimension finie.

2.7.1 Définition

Une *matrice* à n lignes et m colonnes est une famille

$$A := (a_{ij})_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m}$$

d'éléments de K. On la représente sous forme de tableau

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Leur ensemble se note $\mathcal{M}_{nm}(K)$.

On dit matrice *carrée* d'ordre n si $m = n$ et on écrit alors $\mathcal{M}_n(K)$. En particulier, on considére la matrice

$$I := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Enfin, on dit *vecteur colonne*

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

si $m = 1$ et *vecteur ligne* $[a_1 \cdots a_m]$ si $n = 1$.

2.7.2 Définitions

Si $\lambda \in K$, le *produit* de A par λ est

$$\lambda A := \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Si

$$B := \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

la *somme* de A et B est

$$A + B := \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Si

$$B := \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

le *produit* de A par B est

$$C := BA := \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pm} \end{bmatrix}$$

avec $c_{ij} := b_{i1}a_{1j} + \cdots + b_{in}a_{nj}$.

2.7.3 Notations

i) Si E est un espace vectoriel muni d'une base

$$\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_n\}$$

et si $u \in E$ a pour coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans cette base, on pose

$$[u]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

ii) Si $\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_m\}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de E et F respectivement, et si $f : E \to F$ est une application linéaire, on pose

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} := [[f(e_1)]_{\mathcal{C}} \cdots [f(e_m)]_{\mathcal{C}}].$$

Lorsque $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on écrit tout simplement $[f]_{\mathcal{B}}$.

2.7.4 Proposition

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de E et F respectivement, si $u \in E$ et si $f : E \to F$ est linéaire, on a

$$[f(u)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}.$$

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des bases de E, F et G respectivement, et si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, on a

$$[g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = [g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}.$$

Démonstration : La vérification laborieuse est laissée en exercice.

2.7.5 Corollaire

L'ensemble $\mathcal{M}_n(K)$ est une K-algébre et si E est un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$, l'application

$$L(E) \to \mathcal{M}_n(K), f \to [f]_{\mathcal{B}}$$

est un isomorphisme d'algébres.

2.7.6 Définition

Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. La *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $[\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

2.7.7 Proposition

i) Une matrice de passage est inversible. Plus précisément, l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

ii) Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et F un espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire, A sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et A' sa matrice dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$. On a alors,

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Démonstration : La premiére assertion est immédiate. Pour la seconde, on remarque que

$$f := \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$$

et donc que

$$[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} := [\mathrm{Id}_F]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}.$$

2.7.8 Définition

Lorsque $A' = Q^{-1}AP$, on dit que A et A' sont *équivalentes*. Si $A' = P^{-1}AP$, on dit qu'elles sont *semblables*.

2.8 Dualité, équations

2.8.1 Définition

Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un *hyperplan*.

2.8.2 Proposition

Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il existe une droite D de E telle que

$$E = H \oplus D.$$

Et ceci est alors vrai pour toute droite D non contenue dans H. En particulier, si $\dim E < \infty$, H est un hyperplan si et seulement si

$$\dim H = \dim E - 1.$$

Démonstration : Si H est un hyperplan, on peut écrire $H = \ker f$ avec $f : E \to K$ linéaire non nulle. Il existe donc $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$ et on notera D la droite dirigée par u. Notons que, réciproquement, si D est une droite non contenue dans H et dirigée par u, alors $f(u) \neq 0$. On peut alors facilement voir que tout $v \in E$

s'écrit alors de maniére unique comme somme d'un élément de H et d'un élément de D. En effet, on a :

$$f(v) = (v - \frac{f(v)}{f(u)}u) + \frac{f(v)}{f(u)}u.$$

Réciproquement, si $E = H \oplus D$, alors H est le noyau de l'application composée de la projection sur D et d'un isomorphisme quelconque entre D et K.

2.8.3 Définition

Le *dual* d'un espace vectoriel E est l'espace

$$\check{E} := L(E, K)$$

des formes linéaires sur E.

2.8.4 Proposition

Si $\mathcal{B} := \{u_1, \ldots, u_n\}$ *est une base de* E*, alors*

$$\check{\mathcal{B}} := \{\check{u}_1, \ldots, \check{u}_n\},$$

o $\check{u}_i$ *est défini par* $\check{u}_i(u_j) = \delta_{ij}$*, est une base de* $\check{E}$*. De plus, on a toujours*

$$f = f(u_1)\check{u}_1 + \cdots + f(u_n)\check{u}_n$$

et

$$u = \check{u}_1(u)u_1 + \cdots + \check{u}_n(u)u_n.$$

Démonstration : On montre d'abord que si $f \in \check{E}$, alors

$$f = f(u_1)\check{u}_1 + \cdots + f(u_n)\check{u}_n.$$

Pour cela, il suffit d'appliquer chaque membre à u_i pour $i = 1, \ldots, n$. On en déduit que $\{\check{u}_1, \ldots, \check{u}_n\}$ est bien une base et on obtient la premiére formule. Pour démontrer la seconde formule, on écrit

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots \lambda_n u_n$$

et on calcule $\check{u}_i(u) = \lambda_i$.

2.8.5 Définition

On dit alors que $\check{\mathcal{B}}$ est la *base duale* de $\mathcal{B}$. La base duale de $\{1_1, \ldots, 1_n\}$ se note $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

2.8.6 Proposition

Si $u \in E$, l'application

$$\varphi_u : \check{E} \to K, f \longmapsto f(u)$$

est une forme linéaire sur $\check{E}$. L'application induite

$$E \to \check{\check{E}}, u \longmapsto \varphi_u$$

est linéaire. Si de plus, $\dim E < \infty$, c'est un isomorphisme.

Démonstration : La premiére assertion est triviale et la seconde se vérifie aisément. Enfin, si $\dim E < \infty$, on peut choisir une base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de E. Comme nos espaces ont mme dimension finie, il suffit pour conclure de montrer que notre application est injective. Si u est dans le noyau, alors pour tout $i = 1, \ldots n$, on a $\check{u}_i(u) = 0$. Il suit que

$$u = \check{u}_1(u)u_1 + \cdots + \check{u}_n(u)u_n = 0.$$

2.8.7 Proposition

Si $\mathcal{S} \subset \check{E}$, alors

$$F := \{u \in E, \forall f \in \mathcal{S}, f(u) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E et on a

$$\dim E = \dim F + \mathrm{rg}\mathcal{S}.$$

Démonstration : La premiére assertion est immédiate car

$$F = \cap_{f \in \mathcal{S}} \ker f.$$

Pour la seconde, comme F ne dépend que du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{S}$, on peut clairement supposer que

$$\mathcal{S} = \{f_1, \ldots, f_r\}$$

avec $f_1, \ldots, f_r$ linéairement indépendants.

On suppose pour simplifier que $\dim E < \infty$ (sinon, il faut montrer que $\dim F$ aussi est infini). On considére alors l'application linéaire

$$f : E \to K^r, u \mapsto (f_1(u), \ldots, f_r(u)).$$

Et on applique le théoréme du rang. Pour cela, il faut s'assurer que f est surjective. En fait, il résulte de 2.8.4Propositionsubsection.2.8.4 que, pour tout $i = 1, \ldots, r$, il existe $u_i \in E$ tel que $f_i(u_j) = \delta_{ij}$ (compléter $\{f_1, \ldots, f_r\}$ en une base de $\check{E}$). On en déduit aisément que les $f(u_i)$ forment une base de K^r.

2.8.8 Proposition

Supposons $\dim E = n < \infty$ *et soit* $F \subset E$ *une partie quelconque. Alors,* F *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si il existe* $f_1, \ldots, f_r \in \check{E}$ *tels que*

$$F = \{u \in E, f_1(u) = \cdots = f_r(u) = 0\}.$$

On peut prendre $f_1, \ldots, f_r \in \check{E}$ *linéairement indépendants et alors* $\dim F = n - r$.

Démonstration : Il reste simplement à montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E, il existe$f_1, \ldots, f_r$ dans $\check{E}$ tels que

$$F = \{u \in E, f_1(u) = \cdots = f_r(u) = 0\}.$$

Il suffit pour cela de prendre une base de

$$\{f \in \check{E}, \forall u \in F, f(u) = 0\}.$$

2.8.9 Définition

On dit alors que

$$\begin{cases} f_1 & = & 0 \\ \vdots & = & 0 \\ f_r & = & 0 \end{cases}$$

est un *systéme (linéaire) d'équations* pour F ou encore que F est l'ensemble des *solutions* du systéme.

2.9 Déterminants

2.9.1 Définition

Le *déterminant* de

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

est

$$\det A := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

2.9.2 Définition

Soient $E_1, \ldots, E_n, F$ des espaces vectoriels. Une application

$$\omega : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$$

qui est linéaire en chaque variable est dite *multilinéaire* ou plus précisément *n-linéaire*.

Soit E un espace vectoriel. Une *forme n-linéaire* sur E est une application multilinéaire

$$\omega : E^n := E \times E \times \ldots \times E \to K.$$

On dit que ω est *alternée* si on a toujours

$$\omega(u_1, \ldots, u_n) = 0$$

chaque fois qu'il existe $i \neq j$ tel que $u_i = u_j$.

Si $\dim E = n$, on dit que l'ensemble $\det \check{E}$ des formes n-linéaires alternées sur E est le *déterminant* de $\check{E}$. Enfin, si $u_1, \ldots, u_n \in E$, on définit leur *déterminant*

$$\det(u_1, \ldots, u_n) : \det \check{E} \to K$$

par

$$\det(u_1, \ldots, u_n)(\omega) = \omega(u_1, \ldots, u_n).$$

2.9.3 Remarque

Si ω est alternée et si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a

$$\omega(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)\omega(u_1, \ldots, u_n)$$

(et la réciproque est vraie si $\mathrm{car} K \neq 2$).

2.9.4 Lemme

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Si

$$f_1, \ldots, f_n \in \check{E},$$

l'application

$$\det(f_1, \ldots, f_n) : E^n \to K, (u_1, \ldots, u_n) \mapsto |f_i(u_j)|$$

est multilinéaire alternée.

Démonstration : On vérifie aisément que $\det(f_1, \ldots, f_n)$ est multilinéaire. On suppose ensuite que $u_i = u_j$ avec $i \neq j$ et on écrit $\mathcal{S}_n = \mathcal{A}_n \cup \tau\mathcal{A}_n$ ou τ est la transposition qui échange i et j. Comme $\epsilon(\tau) = -1$ et que, pour tout $k = 1, \ldots, n$, on a $u_{\tau(k)} = u_k$, on voit que

$$\det(f_1, \ldots, f_n)(u_1, \ldots, u_n) =$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \epsilon(\sigma) f_1(u_{\sigma(1)}) \ldots f_n(u_{\sigma(n)}) +$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} (-1)\epsilon(\sigma) f_1(u_{\sigma(1)}) \ldots f_n(u_{\sigma(n)}) = 0.$$

2.9.5 Définition

On dit que $\det(f_1, \ldots, f_n) \in \det \check{E}$ est le *déterminant* de $f_1, \ldots, f_n$.

2.9.6 Proposition

Soit $u_1, \ldots, u_n \in E$, *alors* $\det(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$ *si et seulement si* $u_1, \ldots, u_n$ *forment une base. Dans ce cas, si pour* $i = 1, \ldots, n$, *on a*

$$v_i := \lambda_{i1} u_1 + \cdots + \lambda_{in} u_n \in E,$$

alors

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = |\lambda_{ij}| \det(u_1, \ldots, u_n).$$

Démonstration : Si les vecteurs sont liés, on peut écrire l'un d'entre eux, disons u_n en fonction des autres :

$$u_n = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{n-1} u_{n-1}.$$

On a alors pour tout $\omega \in \det \check{E}$,

$$\begin{gathered} \omega(u_1, \ldots, u_n) = \\ \lambda_1 \omega(u_1, \ldots, u_{n-1}, u_1) + \cdots + \\ \lambda_{n-1} \omega(u_1, \ldots, u_{n-1}, u_{n-1}) = 0 \end{gathered}$$

car ω est alternée.

Supposons maintenant que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de E. On remarque déjà que

$$\det(\check{u}_1, \ldots, \check{u}_n)(u_1, \ldots, u_n) = 1,$$

ce qui montre que $\det(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$.

Il reste à vérifier la derniére assertion. Soit $\omega \in \det \check{E}$ et pour $i = 1, \ldots, n$,

$$v_i := \lambda_{i1} u_1 + \cdots + \lambda_{in} u_n \in E.$$

Comme ω est multilinéaire alternée, on vérifie aisément que

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = |\lambda_{ij}| \omega(u_1, \ldots, u_n).$$

2.9.7 Remarque

Un argument analogue montre que si $f_1, \ldots, f_n \in \check{E}$, alors $\det(f_1, \ldots, f_n) = 0$ si et seulement si $f_1, \ldots, f_n$ sont liés.

2.9.8 Proposition

Soient $H_1, \ldots, H_n$, n *hyperplans d'équations respectives* $f_1 = 0, \ldots, f_n = 0$ *dans un espace* E *de dimension* n. *Alors,*

$$H_1 \cap \ldots \cap H_n \neq 0 \Leftrightarrow \det(f_1, \ldots, f_n) = 0.$$

Démonstration : En effet, dire que

$$\det(f_1, \ldots, f_n) \neq 0$$

signifie que $f_1, \ldots, f_n$ sont linéairement indépendants et donc que

$$\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_n) = 0.$$

2.9.9 Proposition

Si $E \neq 0$, le déterminant de $\check{E}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 *de l'espace des applications $E^n \to K$. Si $u_1, \ldots, u_n \in E$, alors* $\det(u_1, \ldots, u_n)$ *est une forme linéaire.*

Démonstration : On vérifie aisément que $\det \check{E}$ est bien un sous-espace vectoriel et que si $u_1, \ldots, u_n \in E$, alors $\det(u_1, \ldots, u_n)$ est linéaire.

Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de E, on sait que

$$\det(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$$

et il suit que $\det \check{E} \neq 0$.

Pour montrer que $\dim \det \check{E} = 1$, il suffit de vérifier que $\det(u_1, \ldots, u_n)$ est injective. Si

$$\det(u_1, \ldots, u_n)(\omega) = 0,$$

alors pour tous $v_1, \ldots, v_n \in E$, on aura grce à la formule de la proposition 2.9.6Proposition subsection.2.9.6,

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_n)(\omega) = 0$$

et donc $\omega = 0$.

2.9.10 Proposition

Si $f \in L(E)$, il existe un unique élément $\det f \in K$ *tel que pour tout $u_1, \ldots, u_n \in E$, on ait*

$$\det(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = (\det f) \det(u_1, \ldots, u_n).$$

Démonstration : Soit $\omega \neq 0$ dans $\det \check{E}$. L'application

$$\omega' : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \omega(f(u_1), \ldots, f(u_n))$$

est clairement n-linéaire alternée. Comme $\dim \det \check{E} = 1$, on a nécessairement $\omega' = \lambda\omega$. Et λ est clairement indépendant du choix de ω.

2.9.11 Définition

On dit alors que $\det f$ est le *déterminant* de f.

2.9.12 Remarque

Si A est la matrice de f dans $\mathcal{B}$, alors $\det f = \det A$.

2.9.13 Proposition

On a toujours

$$\det(g \circ f) = (\det g)(\det f).$$

De plus, f est bijective si et seulement si $\det f \neq 0$.

Démonstration : La premiére assertion est triviale et la seconde résulte de la proposition 2.9.6Proposition subsection.2.9.6.

2.10 Produit scalaire

2.10.1 Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Une forme bilinéaire

$$(u, v) \longmapsto \langle u, v\rangle$$

sur E est *symétrique* si

$$\forall u, v \in E, \langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle.$$

On dit qu'une forme bilinéaire symétrique $\langle -, -\rangle$ sur E est est *définie positive* ou que c'est un *produit scalaire* si on a la propriété

$$\langle u, u\rangle > 0 \Leftrightarrow u \neq 0.$$

2.10.2 Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Une *norme* sur E est une application $\| - \| : E \to \mathbf{R}$ telle que

a) Si $u \in E$, alors $\|u\| > 0 \Leftrightarrow u \neq 0$

b) Si $u, v \in E$ alors $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

c) si $\lambda \in \mathbf{R}$ et $u \in E$, alors $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$

2.10.3 Proposition

Soit $\langle -, -\rangle$ un produit scalaire. Alors,

i) La fonction

$$\| - \| : E \to \mathbf{R}, u \longmapsto \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

est une norme sur E et on a toujours

$$\langle u, v\rangle = \frac{\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}$$

ii) (Inégalité de Cauchy-Schwartz) On a toujours

$$\langle u, v\rangle \leq \|u\|\|v\|.$$

Démonstration : On montre d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On peut supposer $u \neq 0$. On regarde le polynme

$$\|\lambda u + v\|^2 = \|u\|^2|\lambda|^2 + 2\lambda\langle u, v\rangle + \|v\|^2.$$

Celui-ci est toujours positif (ou nul). Son discriminant est donc négatif (ou nul) et on a donc

$$\langle u, v\rangle^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \leq 0.$$

Il suit que

$$\langle u, v\rangle \leq \|u\|\|v\|.$$

On vérifie ensuite que l'on a bien une norme. La premiére et la derniére condition résultent directement des définitions. La seconde est conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwartz : on a d'une part

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2,$$

et d'autre part

$$(\|u\| + \|v\|)^2 = \|u\|^2 + 2\|u\|^2\|v\|^2 + \|v\|^2.$$

Enfin, pour la formule, il suffit de développer.

2.10.4 Définition

Un *espace vectoriel euclidien* est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$ muni d'un produit scalaire $\langle -, -\rangle$. On dit qu'une partie $\mathcal{S}$ de E est *orthogonale* à une partie $\mathcal{T}$ et on écrit $\mathcal{S}\perp\mathcal{T}$ si

$$\forall u \in \mathcal{S}, v \in \mathcal{T}, \langle u, v\rangle = 0.$$

Si $\mathcal{S} \subset E$, la *partie orthogonale* à $\mathcal{S}$ est

$$\mathcal{S}^\perp := \{u \in E, u\perp\mathcal{S}\}.$$

2.10.5 Remarque

Tout sous-espace vectoriel d'un espace euclidien est de maniére évidente un espace euclidien.

2.10.6 Lemme

Soit E un espace vectoriel euclidien. Si $u \in E$, l'application

$$\langle u, -\rangle : E \to \mathbf{R}, v \mapsto \langle u, v\rangle$$

est une forme linéaire. De plus, l'application

$$E \to \check{E}, u \mapsto \langle u, -\rangle$$

est un isomorphisme.

Démonstration : La premiére assertion se vérifie aisément. Pour la seconde, comme les espaces ont mme dimension, il suffit de vérifier que le noyau est trivial, ce qui est immédiat.

2.10.7 Proposition

i) Si $\mathcal{S} \subset E$, alors $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}^{\perp\perp}$. D'autre part, si $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, alors $\mathcal{T}^\perp \subset \mathcal{S}^\perp$.

ii) Si $\mathcal{S} \subset E$, alors $\mathcal{S}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et

$$\dim E = \dim \mathcal{S}^\perp + \mathrm{rg}\mathcal{S}.$$

iii) Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors

$$E = F \oplus F^\perp \text{ et } F^{\perp\perp} = F.$$

iv) Si F et G sont deux sous-espace vectoriel de E, alors

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$

et

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Démonstration : La premiére assertion se vérifie facilement. Sous l'isomorphisme

$$E \tilde{\to} \check{E}, u \mapsto \langle u, - \rangle,$$

une partie $\mathcal{S}$ de E correspond à une partie $\mathcal{T} \subset \check{E}$ et on a

$$\mathcal{S}^\perp = \{u \in E, \forall f \in \mathcal{T}, f(u) = 0\}.$$

La seconde assertion résulte donc de la proposition 2.8.7Propositionsubsection.2.8.7

Si F est un sous-espace vectoriel de E, il est clair que $F \cap F^\perp = 0$. De plus, comme on vient de le voir,

$$\dim E = \dim F^\perp + \dim F.$$

On a donc bien

$$E = F \oplus F^\perp.$$

On voit aussi que $\dim F^{\perp\perp} = \dim F$ et comme $F \subset F^{\perp\perp}$, on a nécessairement $F^{\perp\perp} = F$.

La derniére assertion est laissée en exercice.

2.10.8 Définition

Un systéme $\mathcal{S}$ d'éléments non-nuls de E est dit *orthogonal* si

$$\forall u \neq v \in \mathcal{S}, u \perp v.$$

Il est dit *orthonormal* si de plus, pour tout $u \in \mathcal{S}$, on a $\|u\| = 1$.

2.10.9 Proposition

Soit E un espace vectoriel euclidien. Alors,

i) Tout systéme orthogonal (resp. orthonormal) est contenu dans une base orthogonale (resp. orthonormale). En particulier, c'est un systéme libre.

ii) L'espace E posséde une base orthonormale.

Démonstration : Montrons tout d'abord qu'un systéme orthogonal $\mathcal{S}$ est libre : si on a une combinaison linéaire nulle d'éléments de $\mathcal{S}$,

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r = 0,$$

alors pour tout $i = 1, \ldots r$, on a

$$\langle u_i, \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r \rangle = 0$$

et donc $\lambda_i \|u_i\|^2 = 0$, ce qui donne $\lambda_i = 0$.

Montrons aussi que si $E \neq 0$, il existe des systémes orthonormaux non vides : on peut trouver un vecteur $u \neq 0$ et on prend le systéme réduit au vecteur $\frac{u}{\|u\|}$.

On procéde ensuite par récurrence sur la dimension de E. Par ce qui précéde, on peut supposer que notre systéme orthogonal (resp. orthonormal) $\mathcal{S}$ est non-vide. Dans ce cas, $\dim \mathcal{S}^\perp < \dim E$ et une base orthonormale de $\mathcal{S}^\perp$ nous permet de compléter notre systéme.

2.10.10 Proposition

Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base orthogonale d'un espace affine euclidien. Alors,

i) Les coordonnées de $v \in E$ sont

$$\frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2}, \ldots, \frac{\langle v, u_n \rangle}{\|u_n\|^2}.$$

ii) Si

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

et

$$w = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n,$$

alors

$$\langle w, z \rangle = \lambda_1 \mu_1 \|u_1\|^2 + \cdots + \lambda_n \mu_n \|u_n\|^2.$$

Démonstration : Un rapide calcul nous donne la seconde formule et on en déduit la premiére.

2.11 Exercices

Exercice 17 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.*

Exercice 18 *Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E avec $F \subset G$. Montrer que*

$$F + (H \cap G) = (F + H) \cap G.$$

Exercice 19 *Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. A-t-on*

$$(F + H) \cap G = (F \cap G) + (H \cap G)?$$

Exercice 20 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que l'application $G \to f(G)$ est une bijection de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent $\ker f$ sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{Im} f$.*

Exercice 21 *On dit qu'un endomorphisme p de E est un* projecteur *si $p^2 := p \circ p = p$. Montrer que p est un projecteur si et seulement si $q := \mathrm{Id}_E - p$ en est un. Montrer qu'alors, $\ker p = \mathrm{Im} q$, $\mathrm{Im} p = \ker q$ et $E = \ker p \oplus \mathrm{Im} p$.*

Exercice 22 *Soient p et q deux projecteurs de E. Montrer que $\mathrm{Im} p \subset \mathrm{Im} q$ si et seulement si $q \circ p = p$.*

Exercice 23 *($\mathrm{car} K \neq 2$) On dit qu'un endomorphisme s de E est une* symétrie *si $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Montre que s est une symétrie si et seulement si $p = \frac{s+\mathrm{Id}_E}{2}$ est un projecteur. En déduire qu'alors*

$$E = \ker(s - Id_E) \oplus \ker(s + Id_E).$$

Exercice 24 *Montrer qu'une homothétie est une application linéaire distincte de l'identité qui laisse les droites invariantes.*

Exercice 25 *Montrer que les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ engendrés par $u := (2, 3, -1, 0)$ et $v := (-3, 1, 0, 2)$, d'une part et $u' := (-5, 9, -2, 6)$ et $v' := (5, 2, -1, -2)$, d'autre part, sont identiques*

Exercice 26 *Soit E l'espace vectoriel des applications $[0, \pi] \to \mathbf{R}$. Montrer que*

$$\mathcal{S} := \{1, sinx, sin2x, sin3x, \ldots\}$$

est un systéme libre de E.

Exercice 27 *On rappelle que la* transposée *de*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

est la matrice

$$^tA := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Montrer que l'application

$$M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R}), A \mapsto {}^tA$$

est une symétrie vectorielle.

Exercice 28 *On rappelle qu'une matrice* symétrique *(resp.* antisymétrique*) est une matrice A telle que*

$$^tA = A \text{ (resp. } {}^tA = -A).$$

Leur ensemble se note $SM_n(\mathbf{R})$ (resp. $AM_n(\mathbf{R})$). Montrer que $SM_n(\mathbf{R})$ et $AM_n(\mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbf{R})$ et que

$$M_n(\mathbf{R}) = SM_n(\mathbf{R}) \oplus AM_n(\mathbf{R}).$$

Exercice 29 *On note C (resp. C_k) l'ensemble des carrés magiques 3-3 (resp. de trace k), c'est à dire, les $A \in M_3(\mathbf{R})$ telles que les sommes des éléments des lignes, des colonnes et des diagonales soient toutes égales (resp. égales à k).*

1. *Montrer que C_k est non-vide et que si $M, N \in C_k$, alors $M - N \in C_0$.*
2. *Montrer que*
$$C_0 = SC_0 \oplus AC_0$$
avec
$$SC_0 = C_0 \cap SM_3(\mathbf{R}) \text{ et } AC_0 = C_0 \cap AM_3(\mathbf{R}).$$
3. *Déterminer une base de SC_0 puis une base de AC_0. En déduire une base de C_0 puis une base de C.*
4. *Trouver un carré magique de trace 27 dont toutes les entrées sont distinctes.*

Exercice 30 *Soit E l'espace des polynmes de degré au plus 3 sur $\mathbf{R}$. Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 les formes linéaires qui envoient P sur $P(0), P(1), P'(0)$ et $P'(1)$ respectivement. Montrer que c'est une base de $\check{E}$. Déterminer la base de E dont c'est la base duale.*

Exercice 31 *Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2+A+I = 0$. Montrer que A est inversible.*

Exercice 32 *Soit $N \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $N^r = 0$. Montrer que $A := I + N$ est inversible.*

Exercice 33 *Calculer A^n pour*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(On pourra chercher une relation linéaire entre les premiéres puissances de A, puis chercher le reste dans la division de X^n par le polynme correspondant)

Exercice 34 *Mme question avec*

$$A := \begin{bmatrix} -15 & 10 & 8 \\ -8 & 6 & 4 \\ -24 & 15 & 13 \end{bmatrix}.$$

Exercice 35 *Résoudre le systéme*

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 3v_n \end{cases}$$

avec conditions initiales $u_0 = 1$ *et* $v_0 = 2$.

Exercice 36 *Soit* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *telle que* $A^2 + A + I = 0$. *Calculer* $\det A$. *Mme question avec* $A^2 - A + I = 0$.

Exercice 37 *Montrer que si* n *est impair, il n'existe pas de* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *telle que* $A^2 + I = 0$. *Mme question avec* $A^2 - \sqrt{2}A + I = 0$.

Exercice 38 *Montrer que si* $A \in M_n(\mathbf{C})$, *alors* $\det \bar{A} = \overline{\det A}$. *En déduire que si* $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ *satisfont* $AB = BA$, *alors* $\det(A^2 + B^2)0$.

Exercice 39 *Montrer que si* n *est impair et* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *antisymétrique, alors* $\det A = 0$.

Exercice 40 *Si* $f : E \to F$ *est une application linéaire,* l'application duale $\check{f} : \check{F} \to \check{E}$ *est donné par*

$$\varphi \mapsto f \circ \varphi.$$

Montrer que $\check{f}$ *est linéaire et que l'on a toujours*

$$g \check{\circ} f = \check{f} \circ \check{g}.$$

Montrer que si A *est la matrice de* f *dans des bases fixées, alors la matrice de* $\check{f}$ *dans les bases duales est* ${}^tA$.

Exercice 41 *Calculer pour tout* $n2$

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ x & \ddots & & \vdots & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & a_1 \end{vmatrix}$$

puis

$$\Gamma_n := \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & a_1 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_1 & x \end{vmatrix}.$$

Exercice 42 *Calculer*

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 43 *Montrer que si* $P \in \mathbf{R}[X]$ *est tel que* $\deg P < n$, *et*

$$A = \begin{bmatrix} P(x) & \cdots & P(x+n) \\ \vdots & & \vdots \\ P(x+n) & \cdots & P(x+n+m) \end{bmatrix},$$

alors $\det A = 0$. *Calculer* $\det B$ *avec*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ n^2 & \cdots & (n+m)^2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 44 *Soient* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *et* $a \neq b$ *fixés. Calculer*

$$\Delta := \begin{vmatrix} \lambda_1 & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

On pourra montrer que

$$\Delta(X) := \begin{vmatrix} \lambda_1 + X & b+X & \cdots & b+X \\ a+X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+X \\ a+X & \cdots & a+X & \lambda_n + X \end{vmatrix}$$

est un polynme de degré au plus 1, *calculer* $\Delta(-a)$ *et* $\Delta(-b)$ *et en déduire* $\Delta = \Delta(0)$.

Exercice 45 *On considére, pour* $a \in \mathbf{R}$, *l'application linéaire*

$$f_a : \mathbf{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbf{R}[X]_{\leq 3}, P \mapsto P(X+a)$$

ainsi que sa matrice M_a *dans la base canonique. Montrer que* M_a *est inversible et calculer* M_a^n *pour* $n \in \mathbf{Z}$. *On pourra d'abord remarquer que pour* $a, b \in \mathbf{R}$, *on a* $f_{a+b} = f_a \circ f_b$.

Exercice 46 *On dit que* $\lambda \in K$ *est une* valeur propre *pour* $f \in L(E)$ *s'il existe* $u \neq 0$ *tel que* $f(u) = \lambda u$. *On dit alors que* u *est un* vecteur propre *pour* f. *Enfin, on dit que* f *est* diagonalisable *s'il existe une base formée de vecteurs propres.*

Montrer que f *est un projecteur si et seulement si* f *est diagonalisable et ses valeurs propres* $\in \{0, 1\}$.

Exercice 47 *Soit $f \in L(E)$. Montrer que f est bijectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre. Montrer qu'alors, si λ est valeur propre de f, alors λ^{-1} est valeur propre de f^{-1}. Montrer qu'en général, si λ est valeur propre de f, alors λ^k est valeur propre de f^k.*

Exercice 48 *Si $f \in L(E)$, on dit que*

$$P := \det(X\mathrm{Id}_E - f)$$

est le polynme caractéristique *de f. Montrer que λ est valeur propre de f si et seulement si $P(\lambda) = 0$.*

Exercice 49 *Calculer le polynme caractéristique de*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Chapitre 3

Géométrie affine : 1ére partie

On fixe un corps de base K. Le lecteur pourra toujours supposer que $K = \mathbf{R}$ et que les espaces sont de dimension finie. Seuls ces cas seront traités en exercice.

3.1 Espaces affines

3.1.1 Définition

Un *espace affine* sur K est un ensemble non-vide E muni d'une action simplement transitive du groupe additif d'un espace vectoriel $\vec{E}$ appelé *espace directeur* de E. La *dimension* de E est celle de $\vec{E}$. En particulier, on parle de *droite affine* ou de *plan affine*. Enfin, un élément de E s'appelle un *point*.

3.1.2 Remarques

Il résulte de 1.7.5Propositionsubsection.1.7.5 qu'un espace affine E de direction $\vec{E}$ est décrit par une application

$$\vec{E} \times E \to E, (u, P) \longmapsto P + u$$

satisfaisant

a) si $P \in E$, alors $P + 0 = P$.

b) si $P \in E$ et $u, v \in \vec{E}$, alors

$$P + (u + v) = (P + u) + v.$$

c) si $P, Q \in E$, il existe u unique tel que $Q = P + u$. On écrit alors $\overrightarrow{PQ} := u$.

3.1.3 **Proposition** (Relation de Chasles)

On a toujours $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Démonstration : En effet, on a

$$P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR})$$

$$= (P + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QR}$$
$$= Q + \overrightarrow{QR} = R.$$

3.1.4 Remarques

Tout espace vectoriel E a une structure naturelle d'espace affine : On a $\vec{E} = E$ et l'action est tout simplement donnée par l'addition dans E.

Réciproquement, si E est un espace affine et $\Omega \in E$, on peut munir E d'une structure d'espace vectoriel en posant

$$P + Q := \Omega + \overrightarrow{\Omega P} + \overrightarrow{\Omega Q}$$

et

$$\lambda P := \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega P}.$$

On note parfois E_Ω cet espace vectoriel.

3.1.5 Définition

Un *parallélogramme* est un quadruplet de points (P, Q, R, S) tels que $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = 0$.

3.2 Sous-espace affines

3.2.1 Proposition

Pour une partie non vide F d'un espace affine E, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe $P \in F$ tel que

$$\vec{F} := \{\overrightarrow{PQ}, Q \in F\}$$

soit un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.

ii) Pour tout $P \in F, \vec{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.

Et alors, $\vec{F}$ ne dépends pas de P.

Démonstration : Il suffit de montrer que si

$$\vec{F} := \{\overrightarrow{PQ}, Q \in F\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ pour $P \in F$, alors, pour tout $P' \in F$, on a

$$\{\overrightarrow{P'Q'}, Q' \in F\} = \vec{F}.$$

La relation de Chasles et le fait que $\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel nous donne

$$\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ'} - \overrightarrow{PP'} \in \vec{F}.$$

Il nous reste donc à montrer l'inclusion réciproque. Si $Q \in F$, on pose $Q' := P' + \overrightarrow{PQ}$. Comme

$$\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{PQ} \in \vec{F},$$

on voit que $Q' \in F$ et par construction, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$.

3.2.2 Définition

On dit alors que F est un *sous-espace affine* de E. Si $\vec{F}$ est un hyperplan, on parle d'*hyperplan (affine)* de E.

3.2.3 Proposition

Si F est un sous-espace affine de E, c'est de maniére naturelle un espace affine sur K d'espace directeur $\vec{F}$.

Démonstration : Il s'agit d'abord de s'assurer que

$$u \in \vec{F}, P \in F \Rightarrow P + u \in F.$$

Comme on peut écrire $u = \overrightarrow{PQ}$ avec $Q \in F$, c'est clair. Il est alors immédiat que l'action de $\vec{E}$ sur E induit une action de $\vec{F}$ sur F. Il reste à vérifier que celle-ci est simplement transitive. On se donne donc deux points $P, Q \in F$. On sait alors que $\overrightarrow{PQ}$ est l'unique vecteur de $\vec{E}$ tel que $Q = P + \overrightarrow{PQ}$. Et on sait aussi que $\overrightarrow{PQ} \in \vec{F}$.

3.2.4 Remarque

i) Si E est un espace vectoriel, les sous-espaces vectoriels de E sont les sous-espaces affine de E qui contiennent 0. Si E est un espace affine et $\Omega \in E$, les sous-espaces affines de E passant par Ω sont les sous-espaces vectoriels de E_Ω.

ii) Si E est un espace affine et $V \subset \vec{E}$, on pose

$$P + V := \{P + u, u \in V\}.$$

Les sous-espaces affines de E sont les parties de la forme $F := P+V$ ou $P \in E$ et V un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ et on a alors $\vec{F} = V$.

iii) Si F est un sous-espace affine de E, on a

$$\dim F \leq \dim E.$$

Si E est de dimension finie et $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

3.2.5 Définition

On dit que des points sont *alignés* (resp. *coplanaires*) si ils appartiennent à une même droite (resp. un même plan). On dit que des droites sont *concourantes* si leur intersection est non-vide. On dit qu'un parallélogramme est *aplati* si tous les points sont alignés.

3.2.6 Proposition

Toute intersection non-vide de sous-espaces affines d'un espace affine E est un sous-espace affine de E. Et l'espace directeur de l'intersection est l'intersection des *espaces directeurs. En particulier, il existe toujours un plus petit sous-espace affine F contenant une partie non-vide A donnée.*

Démonstration : On se donne tout d'abord une famille $\{F_i\}$ de sous-espace affine de E et on prend un point P dans l'intersection, supposée non-vide. On vérifie alors aisément que

$$\cap F_i = P + \cap \vec{F}_i.$$

La seconde assertion en résulte formellement.

3.2.7 Définition

On dit alors que F est le sous-espace affine *engendré* par A. On le note parfois (A). En fait, si

$$A := \{P_1, \ldots, P_n\},$$

on écrit

$$F =: (P_1 \cdots P_n).$$

3.2.8 Remarque

"Par deux points distincts P et Q, il passe une droite et une seule". Cela signifie que (PQ) est une droite.

3.2.9 Définition

Un *triangle* est un ensemble $\{A, B, C\}$ de trois points non-alignés. On dit que les points A, B et C sont les *sommets* du triangle. Les droites $(BC), (AC)$ et (AB) sont respectivement, les *ctés opposés* aux sommets A, B et C.

Dans un parallélogramme non-trivial (P, Q, R, S), on dit que les droites (PR) et (QS) sont les *diagonales*.

3.3 Positions relatives

3.3.1 Définition

Deux sous-espaces affine F et G sont *paralléles* si $\vec{F} = \vec{G}$. On écrit $F \parallel G$.

3.3.2 Proposition

i) *Si $F \parallel G$, alors $F = G$ ou $F \cap G = \emptyset$.*

ii) *Soient E un espace affine, F un sous-espace affine de E et P un point de E. Alors, il existe un unique sous-espace affine G passant par P et paralléle à F.*

Démonstration : Supposons que $F \parallel G$ mais que

$$F \cap G \neq \emptyset.$$

Soit P dans l'intersection. Alors,

$$F = P + \vec{F} = P + \vec{G} = G.$$

Cela montre la premiére assertion. Pour la seconde, il suffit de voir que $G = P + \overrightarrow{F}$.

3.3.3 Remarque

Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace affine de E. Alors, $\overrightarrow{F}$ est le sous-espace de E paralléle à F passant par 0.

3.3.4 Proposition

Un quadruplé (P, Q, R, S) de points non tous alignés est un parallélogramme si et seulement si les points sont distincts et

$$(PQ) \parallel (RS) \textit{ et } (PS) \parallel (QR).$$

Démonstration : On vérifie aisément quei dans un parallélogramme non aplati, tous les points sont distincts. De plus, puisque $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = 0$, on a

$$(PQ) \parallel (RS).$$

De plus, on a

$$\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{RQ} = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS}) + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = 0$$

et donc $(PS) \parallel (QR)$.

Réciproquement, supposons

$$(PQ) \parallel (RS) \text{ et } (PS) \parallel (QR).$$

et soit

$$S' := R + \overrightarrow{QP}.$$

Alors, (P, Q, R, S') est un parallélogramme. On a donc

$$(RS') \parallel (PQ) \parallel (RS)$$

d'o $(RS') = (RS)$ et

$$(PS') \parallel (QR) \parallel (PS)$$

d'o $(PS') = (PS)$. On a donc

$$S = (RS) \cap (PS) = (RS') \cap (PS') = S'.$$

3.3.5 Théoréme (d'incidence)

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace affine E, et H l'espace engendré par F et G. Alors

i) Si $F \cap G \neq \emptyset$, on a

$$\begin{aligned}\dim H &= \dim(\vec{F} + \vec{G}) \\ &= \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).\end{aligned}$$

ii) Si $F \cap G = \emptyset$, on a

$$\begin{aligned}\dim H &= \dim(\vec{F} + \vec{G}) + 1 \\ &= \dim F + \dim G + 1 - \dim(\vec{F} \cap \vec{G}).\end{aligned}$$

Démonstration : Dans le premier cas, on choisit un point P dans l'intersection et on montre que

$$H = P + (\vec{F} + \vec{G}).$$

L'inclusion est claire car H est le plus petit sous-espace affine contenant F et G. D'autre part, puisque $F \subset H$, on a $\vec{F} \subset \vec{H}$ et de même pour G. Il suit que

$$\vec{F} + \vec{G} \subset \vec{H}$$

et comme $P \in H$, on obtient bien l'inclusion réciproque. On applique ensuite la relation de Grassman.

Dans le second cas, on choisit deux points P et Q dans F et G respectivement, et on note $D := (PQ)$ la droite qui passe par ces points. On note G' le sous-espace engendré par G et D. Bien sr, on a

$$\vec{G'} = \vec{G} \oplus \vec{D}.$$

D'autre part, il est clair que H est le sous-espace engendré par F et G' et ceux ci se rencontrent. On a donc

$$\begin{aligned}\dim H &= \dim(\vec{F} + \vec{G'}) \\ &= \dim(\vec{F} + \vec{G} + \vec{D}) = \dim(\vec{F} + \vec{G}) + \dim \vec{D}\end{aligned}$$

car

$$(\vec{F} + \vec{G}) \cap \vec{D} = 0$$

comme il résulte du lemme suivant.

3.3.6 Lemme

Soient $P \in F$ et $Q \in G$. Alors

$$F \cap G \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in \vec{F} + \vec{G}.$$

Démonstration : Si $R \in F \cap G$, alors

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} \in \vec{F} + \vec{G}.$$

Réciproquement, si $\overrightarrow{PQ} = u + v$ avec $u \in \vec{F}$ et $v \in \vec{G}$, on a

$$R := P + u = Q - v \in F \cap G.$$

3.3.7 Définition

On dit que deux sous-espaces affines F et G sont *supplémentaires* dans E et on écrit $E = F \oplus G$ si les espaces directeurs associés le sont.

3.3.8 Proposition

Soient E un espace affine, et F, G deux sous-espaces affines de E tels que $\vec{E} = \vec{F} + \vec{G}$, alors $F \cap G \neq \emptyset$. En particulier, si F et G sont supplémentaires dans E, alors $F \cap G$ est réduit à un point.

En fait, si $\dim E < \infty$, on a $E = F \oplus G$ si et seulement si $\dim E = \dim F + \dim G$ et $F \cap G$ est réduit à un point.

De même, si H est un hyperplan de E et D une droite, on a on a $E = H \oplus D$ si et seulement si $H \cap D$ est réduit à un point.

Démonstration : La premiére assertion résulte du lemme précédent. En particulier, si F et G sont supplémentaires, alors $\vec{F} \cap \vec{G} = 0$ et $F \cap G$ est donc réduit à un point.

On en déduit que la condition est bien nécessaire dans les deux derniéres assertions. La suffisance de la condition est immédiate.

3.4 Applications affines

3.4.1 Proposition

Pour une application $f : E \to F$ entre deux espaces affines, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe $P \in E$ tel que l'application

$$\vec{f} : \vec{E} \to \vec{F}, u \longmapsto \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

avec $Q := P + u$ soit linéaire.

ii) Pour tout $P \in E$, l'application $\vec{f}$ est linéaire. De plus, celle si ne dépend pas de P.

Démonstration : On suppose donc que pour $P \in E$ donné, l'application

$$\vec{f} : \vec{E} \to \vec{F}, u \longmapsto \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

avec $Q := P + u$ est linéaire. Il s'agit de montrer que si $P' \in E$ et $Q' := P' + u$ avec $u \in E$, alors

$$\overrightarrow{f(P')f(Q')} = \vec{f}(u).$$

Par définition, on a

$$f(P') = f(P) + \vec{f}(\overrightarrow{PP'})$$

et

$$f(Q') = f(P) + \vec{f}(\overrightarrow{PQ'}),$$

et donc

$$\overrightarrow{f(P')f(Q')} = \vec{f}(\overrightarrow{PQ'}) - \vec{f}(\overrightarrow{PP'}).$$

Comme $\vec{f}$ est linéaire, on voit que

$$\overrightarrow{f(P')f(Q')} = \vec{f}(\overrightarrow{PQ'} - \overrightarrow{PP'}) = \vec{f}(\overrightarrow{P'Q'}) = \vec{f}(u).$$

3.4.2 Définition

On dit alors que f est une *application affine* de E vers F. On dit *endomorphisme* si $E = F$, *isomorphisme* si f est bijective et *automorphisme* si les deux conditions sont vérifiées. On note $GA(E)$ l'ensemble des automorphismes de l'espace affine E.

3.4.3 Remarques

i) Si E et F sont deux espaces vectoriels, les applications linéaires $f : E \to F$ sont les applications affines telles que $f(0) = 0$.

ii) Si E et F sont deux espaces affines, $\Omega \in E$ et $O \in F$, alors les applications affines $f : E \to F$ telles que $f(\Omega) = O$ sont les applications linéaires $E_\Omega \to F_O$.

iii) Si E et F sont deux espaces affines, les applications affines $E \to F$ sont les applications de la forme

$$R \longmapsto Q + \varphi(\overrightarrow{PR})$$

ou P et Q sont des points fixés de E et F, respectivement, et $\varphi : \vec{E} \to \vec{F}$ est linéaire.

3.4.4 Proposition

i) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications affines. Alors $g \circ f$ est affine et $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.

ii) Soit $f : E \to F$ une application affine. Alors, f est injective (resp. surjective, resp. bijective) si et seulement si $\vec{f}$ l'est.

iii) Si f est un isomorphisme, alors f^{-1} est affine et

$$\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}.$$

Démonstration : On a

$$(g \circ f)(Q) = g(f(Q)) = g(f(P) + \vec{f}(\overrightarrow{PQ}))$$

$$= g(f(P)) + \vec{g}(\vec{f}(\overrightarrow{PQ})) = (g \circ f)(P) + (\vec{g} \circ \vec{f})(\overrightarrow{PQ}).$$

Cela montre la premiére assertion.

Maintenant, on a $P = Q$ si et seulement si $\overrightarrow{PQ} = 0$. Il suit aisément que f est injective si et seulement si $\vec{f}$ l'est. Aussi, il est clair que si f est surjective, il en va de même de $\vec{f}$. Réciproquement, supposons $\vec{f}$ surjective, donnons nous $Q \in F$ et montrons qu'il existe $P \in E$ tel que $f(P) = Q$. On choisit $\Omega \in E$. Comme $\vec{f}$ est surjective, on peut trouver $u \in \vec{E}$ tel que

$$\vec{f}(u) = \overrightarrow{f(\Omega)Q}$$

et il suffit alors de poser $P := \Omega + u$.

Pour conclure, il reste à vérifier que si f est un isomorphisme, alors

$$f^{-1}(Q) = f^{-1}(P) + \vec{f}^{-1}(\overrightarrow{PQ}).$$

En appliquant f qui est bijective, on est ramené à s'assurer que

$$Q = f(f^{-1}(P) + \vec{f}^{-1}(\overrightarrow{PQ})),$$

c'est à dire que $Q = P + \overrightarrow{PQ}$. Ce qui est clair.

3.4.5 Proposition

Soit $f : E \to F$ une application affine. Alors,

i) Si G est un sous-espace affine de E, $f(G)$ est un sous-espace affine de F de direction $\vec{f}(\vec{G})$.

ii) Si G est un sous-espace affine de F, $f^{-1}(G)$ est est soit vide, soit un sous-espace affine de F de direction $f^{-1}(G)$.

Démonstration : Pour la premiére assertion, on voit que si $P \in G$, alors

$$f(G) = f(P) + \vec{f}(\vec{G}).$$

Pour la seconde, on peut supposer $f^{-1}(G) \neq \emptyset$ et il existe donc Ω tel que $f(\Omega) \in G$. On a alors

$$f^{-1}(G) = \Omega + \vec{f}^{-1}(\vec{G}).$$

3.4.6 Proposition

Soit $\lambda \in K$. Si $f : E \to K$ est une application affine non-constante, alors

$$H := \{P \in E, f(P) = \lambda\}$$

est un hyperplan et on a

$$\vec{H} = \ker \vec{f} = \{u \in \vec{E}, \vec{f}(u) = 0\}.$$

Tout hyperplan s'obtient de cette maniére.

Démonstration : Puisque f est non-constante et que l'espace d'arrivée est une droite, on voir que f est surjective. En particulier, $H \neq \emptyset$. On peut donc trouver $\Omega \in H$, et on a alors $H = \Omega + \ker \vec{f}$. Réciproquement, si $H = \Omega + \ker \varphi$ ou φ est une application linéaire non-nulle, alors l'application

$$f := P \longmapsto \varphi(\overrightarrow{\Omega P}) - \lambda$$

est affine, non-constante, et

$$H = \{P \in E, f(P) = \lambda\}.$$

3.4.7 Proposition

Supposons $\dim E = n < \infty$ *et soit* $F \subset E$ *non vide. Alors,* F *est un sous-espace affine de* E *si et seulement si il existe*

$$f_1, \ldots, f_r : E \to K$$

affines non constantes et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ *tels que*

$$F = \{P \in E, f_1(P) = \lambda_1, \ldots, f_r(P) = \lambda_r\}.$$

Et alors,

$$\vec{F} = \{u \in \vec{E}, \vec{f_1}(u) = \cdots = \vec{f_r}(u) = 0\}.$$

Si $\dim F = s$*, on peut prendre* r *tel que* $r + s = n$ *et* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.

Démonstration : La condition est clairement suffisante puisqu'une intersection d'hyperplan est bien un espace affine. Pour conclure il suffit de montrer qu'elle est nécessaire même avec les derniéres restrictions. On peut trouver $g_1, \ldots, g_r \in \check{\vec{E}}$ non nulles telles que

$$\vec{F} = \{u \in \vec{E}, g_1(u) = \cdots = g_r(u) = 0\}.$$

On choisit $\Omega \in F$ et on pose $f_i(P) := g_i(\overrightarrow{\Omega P})$.

3.4.8 Définition

On dit alors que "$f_1 = \lambda_1, \ldots, f_r = \lambda_r$" est un *systéme d'équations* pour F ou que F est l'ensemble des solutions du systéme.

3.5 Projections, dilatations

3.5.1 Définition

Soit f un endomorphisme de E. On dit que $P \in E$ est un *point fixe* de f si $f(P) = P$.

3.5.2 Proposition

Si un endomorphisme f *de* E *posséde des points fixes, ceux-ci forment un sous-espace affine de direction*

$$\ker(\mathrm{Id}_{\vec{E}} - \vec{f}).$$

Démonstration : En effet, si Ω est un point fixe de f, alors, les points fixes de f sont les $P \in E$ tels que $\vec{f}(\overrightarrow{\Omega P}) = \overrightarrow{\Omega P}$.

3.5.3 Définition

Soient F et G deux sous-espaces affines supplémentaires dans E. La *projection* sur F parallélement à G est l'application

$$p : E \to E, P \mapsto P'$$

définie comme suit : si G' est l'unique sous-espace affine de E passant par P et paralléle à G, alors $P' = F \cap G'$.

3.5.4 Proposition

Une application

$$p : E \to E$$

est une projection si et seulement si c'est une application affine telle que $p \circ p = p$.

Démonstration : Soient F et G deux sous-espaces affines supplémentaires dans E et p la projection sur F parallélement à G. Comme il est clair que $p \circ p = p$, il faut montrer que p est affine. On pose $\Omega = F \cap G$ et pour $u := \overrightarrow{\Omega P}$, on pose

$$\vec{p}(u) = \overrightarrow{\Omega p(P)}.$$

On a alors

$$u = \vec{p}(u) + (u - \vec{p}(u))$$

avec $\vec{p}(u) \in \vec{F}$ et

$$u - \vec{p}(u) = \overrightarrow{p(P)P} \in \vec{G}.$$

On voit donc que $\vec{p}$ est la projection associée à cette décomposition, qui est bien sr linéaire (vérifier). Et il suit que p est affine.

Réciproquement, soit p une application affine telle que $p \circ p = p$. On remarque tout d'abord que p posséde des points fixe : si $O \in E$ et $\Omega := p(O)$, alors

$$p(\Omega) = p(p(O)) = p(O) = \Omega.$$

On note F l'ensemble des points fixes et G le sous-espace affine passant par Ω de direction $\ker \vec{p}$. Comme

$$\vec{F} = \ker(Id_{\vec{E}} - \vec{p}),$$

il est clair que $\vec{F} \cap \vec{G} = 0$. De plus, si $u \in E$, alors

$$u = \vec{p}(u) + (u - \vec{p}(u))$$

avec $\vec{p}(u) \in \vec{F}$ et $u - \vec{p}(u) \in \vec{G}$. On a donc bien

$$E = F \oplus G.$$

Enfin, on a

$$\overrightarrow{p(P)P} = u - \vec{p}(u) \in \vec{G}$$

avec $u := \overrightarrow{\Omega P}$ et $p(P)$ est donc bien dans le sous-espace affine G' de direction G passant par P.

3.5.5 Définition

Soit f un endomorphisme de E. Si $\vec{f}$ est nulle (resp. l'identité, resp. une homothétie de rapport k) on dit que f est *constante* (resp. une *translation*, resp. une *homothétie de rapport* k). On dit *dilatation* pour "homothétie ou translation".

3.5.6 Proposition

i) Une translation est une application de la forme

$$P \longmapsto P + u.$$

C'est l'identité si $u = 0$*. Sinon, celle ci n'a pas de point fixe.*

ii) Une homothétie de rapport k *est une application de la forme*

$$P \longmapsto \Omega + k\overrightarrow{\Omega P}$$

avec $k \neq 0, 1$*. Et* Ω *est son unique point fixe (son* centre*).*

Démonstration : Soit $\Omega \in E$. Si f est une translation, on voit immédiatement que si $u := \overrightarrow{\Omega f(\Omega)}$, alors pour tout $P \in E$,

$$f(P) = f(\Omega) + \overrightarrow{\Omega P} =$$

$$f(\Omega) + \overrightarrow{f(\Omega)P} + \overrightarrow{\Omega f(\Omega)} = P + u.$$

Réciproquement, si f est définie par $f(P) = P + u$, on a en particulier $f(\Omega) = \Omega + u$. Le même calcul que ci-dessus nous dit que

$$f(P) = f(\Omega) + \overrightarrow{\Omega P},$$

ce qui montre que f est bien une translation.

Supposons maintenant que f est une homothétie de rapport k. On prend un point $P \in E$. On voit que $\Omega \in E$ est un point fixe de f si et seulement si

$$\overrightarrow{f(P)\Omega} = \vec{f}(\overrightarrow{P\Omega}) = k\overrightarrow{P\Omega},$$

c'est à dire

$$k\overrightarrow{P\Omega} = \overrightarrow{f(P)P} + \overrightarrow{P\Omega},$$

ou encore

$$\Omega = P + (\frac{1}{k-1})\overrightarrow{f(P)P}.$$

Cela montre l'existence et l'unicité du point fixe. Il est clair que f est alors donné par la formule ci dessus, et qu'une telle formule définit bien une homothétie de rapport k.

3.5.7 Proposition

Un endomorphisme f de E est une dilatation si et seulement si pour toute droite $D \subset E$, $f(D)$ est une droite paralléle à D. De plus, on a $f(D) = D$ si et seulement si f est une translation de vecteur $u \in \vec{D}$ ou une homothétie dont le centre est sur D.

Démonstration : Par définition, f est une dilatation si et seulement si $\vec{f}$ est une homothétie ou l'identité. On peut vérifier que cette condition est équivalente à

$$\vec{f}(\Delta) = \Delta$$

pour toute droite $\Delta \subset \vec{E}$. Et ceci signifie que $\overrightarrow{f(D)} = \vec{D}$ pour toute droite $D \subset E$, ou encore que $f(D) \parallel D$. La derniére assertion se vérifie aisément en utilisant les descriptions ci-dessus des dilatations. Plus précisément, si f est la translation de vecteur u et $P \in D$, on a alors $u = \overrightarrow{Pf(P)}$. Il suit que $f(P) \in D$ si et seulement si $u \in \vec{D}$. De même, si f est l'homothétie de centre Ω et de rapport k, et $P \in D$ avec $P \neq \Omega$, alors

$$f(P) = \Omega + k\overrightarrow{\Omega P} \in (\Omega P)$$

et on voit que $f(P) \in D$ si et seulement si $\Omega \in D$.

3.6 Théorémes de Desargues et Pappus

3.6.1 Proposition

Soient P, Q, P' et Q' quatre points de E avec $P \neq Q$. Alors, il existe une dilatation f telle que $f(P) = P'$ et $f(Q) = Q'$ si et seulement si $P' \neq Q'$ et $(PQ) \parallel (P'Q')$. Celle ci est alors unique. De plus, f est

i) une translation si $(PP') \parallel (QQ')$ ou alors $P = P'$ et $Q = Q'$.

ii) une homothétie de centre Ω si

$$(PP') \cap (QQ') = \{\Omega\},$$

ou $P = P' = \Omega$ et $Q \neq Q'$, ou encore $Q = Q' = \Omega$ et $P \neq P'$.

Démonstration : Il résulte de la proposition précédente que la condition est bien nécessaire. Montrons qu'elle est aussi suffisante et que f est alors unique.

Comme l'identité est l'unique dilatation qui a plusieurs points fixes, le cas $P = P'$ et $Q = Q'$ est trivial.

Supposons maintenant que $P = P'$ et $Q \neq Q'$. Comme $(PQ) \parallel (PQ')$, les points sont alignés. Si on pose

$$\overrightarrow{PQ'} = \lambda\overrightarrow{PQ},$$

on voit que l'homothétie de centre P et de rapport λ est l'unique dilatation qui répond à la question.

Si tous les points distincts et $(PP') \parallel (QQ')$. On a alors un parallélogramme (P, Q, Q', P') et et la translation f de vecteur $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$ est l'unique dilatation telle que $f(P) = P'$ et $f(Q) = Q'$.

Enfin, il reste à regarder ce qui se passe quand tous les points sont distincts et $(PP') \not\parallel (QQ')$. Remarquons tout d'abord que comme $(PQ) \parallel (P'Q')$, il résulte du théoréme d'incidence que l'espace engendré par P, Q, P' et Q' est de dimension 2. Une nouvelle application du théoréme d'incidence nous dit que $(PP') \cap (QQ')$ est réduit à un point Ω. Et comme les points P, Q, P' et Q' ne sont pas alignés, on a $\Omega \neq P$. On écrit alors $\overrightarrow{\Omega P'} = \lambda \overrightarrow{\Omega P}$ et on considére l'homothétie f de rapport λ et de centre Ω. On a bien sr $f(P) = P'$ mais aussi $f(Q) = Q'$: en effet, on sait alors que $f(Q)$ est l'intersection de la droite (ΩQ) et de la paralléle à (PQ) passant par P', c'est à dire Q'. Enfin, f est l'unique dilatation telle que $f(P) = P'$ et $f(Q) = Q'$ car on a alors nécessairement $f(\Omega) = \Omega$.

3.6.2 **Corollaire** (Théoréme de Desargues)

Soient $\{P, Q, R\}$ et $\{P', Q', R'\}$ deux triangles avec $P' \neq P, Q' \neq Q$ et $R' \neq R$, dont les ctés sont paralléles deux à deux ($(PQ) \parallel (P'Q'), (QR) \parallel (Q'R')$ et $(RP) \parallel (R'P')$). Alors, les droites passant par les sommets ($(PP'), (QQ')$ et (RR')) sont, soit concourantes, soit paralléles.

Démonstration : On peut considérer la dilatation f qui envoie P sur P' et Q sur Q'. La droite $(P'f(R))$ est paralléle a (PR) et passe par P', c'est donc la droite $(P'R')$. On a donc $f(R) \in (P'R')$ et pour la même raison $f(R) \in (Q'R')$. Il suit que $f(R) = R'$. Si f est une translation, les droites sont paralléles, sinon elles sont concourantes (au centre de l'homothétie).

3.6.3 **Proposition**

L'ensemble $GA(E)$ est un sous-groupe de $S(E)$. L'application

$$f \longmapsto \vec{f}$$

induit un homomorphisme surjectif

$$GA(E) \to GL(\vec{E}).$$

Son noyau est formé des translations. L'application qui a u associe la translation de vecteur u est un homomorphisme injectif du groupe additif de $\vec{E}$ vers $GA(E)$. Enfin, les dilatations forment un sous-groupe de $GA(E)$.

Démonstration : La partie $GA(E)$ est bien stable par composition et par inverse. On a un homomorphisme de groupes $GA(E) \to GL(\vec{E})$ et la surjectivité est immédiate : si $\varphi \in GL(\vec{E})$, on choisit Ω et on pose

$$f(P) = \Omega + \varphi(\overrightarrow{\Omega P}).$$

L'assertion suivante dit tout simplement que la composée des translations de vecteur u et v est la translation de vecteur $u + v$, et que la translation de vecteur u

est l'identité si et seulement si $u = 0$. Finalement, l'image inverse par $f \longmapsto \vec{f}$ du sous-groupe de $GL(\vec{E})$ formé des homothéties et de l'identité est un groupe qui est exactement composé des dilatations.

3.6.4 Proposition

Deux dilatations commutent si et seulement si, l'une est l'identité, ce sont deux translations ou ce sont deux homothéties de même centre.

Démonstration : On vérifie aisément que les conditions sont suffisantes. Réciproquement, supposons que
$$g \circ f = f \circ g$$
et que f est une homothétie de centre Ω et de rapport k. En écrivant que
$$(g \circ f)(\Omega) = (f \circ g)(\Omega),$$
on voit que
$$g(\Omega) = \Omega + k\overrightarrow{\Omega g(\Omega)}.$$
Comme $k \neq 0, 1$, on a donc $g(\Omega) = \Omega$, ce qui montre que g est soit une homothétie de centre Ω, soit l'identité.

3.6.5 Corollaire (Théoréme de Pappus)

Soient D et D' deux droites distinctes munies de points tous distincts P, Q, R et P', Q', R', respectivement, et non situés sur l'intersection (éventuelle) de D et D'. Supposons que $(PQ') \parallel (QP')$ et $(QR') \parallel (RQ')$. Alors $(PR') \parallel (RP')$.

Démonstration : On peut considérer par 3.6.1Propositionsubsection.3.6.1 la dilatation f (resp. g) qui envoie P sur Q (resp. Q sur R) et Q' sur P' (resp. R' sur Q'). Ce sont des translations si $D \parallel D'$ ou des homothéties de même centre $\Omega = D \cap D'$. On vient de voir qu'alors $g \circ f = f \circ g$ et que cette derniére est une translation ou une homothétie de centre Ω. Et on applique à nouveau 3.6.1Propositionsubsection.3.6.1.

3.7 Exercices

Exercice 50 *On pose*

$$E := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, x+y+1=0\}.$$

Montrer que l'application

$$\mathbf{R} \times E \to E, (\lambda,(x,y)) \to (x+\lambda, y-\lambda)$$

est bien définie et fait de E un espace affine.

Exercice 51 *Montrer que l'application*

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R}_{>0}, (\lambda, P) \to Pe^{\lambda}$$

fait de $\mathbf{R}_{>0}$ un espace affine.

Exercice 52 *Soit*

$$E := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, x+y+1=0\}.$$

Montrer que c'est un sous-espace affine de $\mathbf{R}^2$ et déterminer son espace directeur.

Exercice 53 *La partie $\mathbf{R}_{>0}$ de $\mathbf{R}$ est elle un sous-espace affine ?*

Exercice 54 *Soient $P := (a,b,c)$ et $Q := (a',b',c')$ deux points distincts de $\mathbf{R}^3$ et $D := (PQ)$. Déterminer un vecteur directeur de $\vec{D}$.*

Exercice 55 *Soit H le sous-espace affine de $\mathbf{R}^3$ engendré par $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$. Déterminer une base de $\vec{H}$.*

Exercice 56 *Soient E l'espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ et $a,b \in R$. Montrer que*

$$F := \{f \in E, f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$$

est un sous-espace affine de E.

Exercice 57 *Soit F une partie non-vide d'un espace affine E sur $\mathbf{R}$. Montrer que F est un sous-espace affine de E si et seulement si*

$$\forall P \neq Q \in F, (PQ) \subset F.$$

Exercice 58 *(à supprimer) Soient F, G deux sous-espaces d'un espace affine E, $P \in F$ et $Q \in G$. Montrer que*

$$F \cap G \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in \vec{F} + \vec{G}.$$

Exercice 59 *Soient D, D' et D'' trois droites paralléles munies de points A, B, A', B' et A'', B'' respectivement. Montrer que*

$$(AA') \parallel (BB') \text{ et } (A'A'') \parallel (B'B'') \Rightarrow (AA'') \parallel (BB'').$$

Exercice 60 *Montrer que dans un plan, deux droites distinctes sont paralléles si et seulement si leur intersection est vide.*

Exercice 61 *Montrer que par trois points non-alignés, il passe un plan et un seul.*

Exercice 62 *Soient F et G deux sous-espaces paralléles distincts de dimension r. Quel est la dimension du sous-espace engendré par F et G.*

Exercice 63 *Soient H et H' deux hyperplans qui ne se rencontrent pas. Montrer que $H \parallel H'$.*

Exercice 64 *Soient E un espace affine de dimension 3 et H et H' deux plans dans E. Montrer que*

$$H \cap H' = \emptyset \Rightarrow H \parallel H'.$$

Ce résultat est-il toujours vrai si on remplace H et H' par deux droites D et D' ?

Exercice 65 *Donner une équation de la droite D de $\mathbf{R}^2$ passant par $P := (1,3)$ dirigée par $u := (3,5)$. Donner aussi une équation de $\vec{D}$.*

Exercice 66 *Donner une équation de la droite D de $\mathbf{R}^2$ passant par $P := (1,2)$ et $Q := (3,4)$. Donner aussi une équation de $\vec{D}$.*

Exercice 67 *Soient $a, b \in \mathbf{R}$ distincts non-nuls avec $|a| \neq |b|$. Donner une équation de la droite D de $\mathbf{R}^2$ passant par $P := (a,b)$ et par l'intersection des droites d'équation*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

et

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1.$$

Exercice 68 *Soient*

$$P := (-1,0), Q := (0,2), R := (2,1), S := (3,-2).$$

On désigne par D et Δ les droites passant par P et Q pour la premiére, et par R et S pour l'autre.

Déterminer un vecteur directeur pour chacune de ces droites. Donner une équation pour chacune de ces droites. Le quadrilatére (P,Q,S,R) est il un parallélogramme ?

Exercice 69 *(faux ?) On se donne deux points M et N dans $\mathbf{R}^2$ non-situés sur les axes. Soit Δ une droite passant par M et coupant Ox en P et Oy en Q. Supposons que la droite (NP) coupe Oy en Q' et que la droite (NQ) coupe Ox en P'. On pose $\Delta' = (P'Q')$. Montrer que toutes les droites Δ' ainsi construites passent par un même point M'.*

Exercice 70 *Donner des équations pour la droite D de $\mathbf{R}^3$ passant par $P := (1,2,3)$ et $Q := (2,0,1)$. Donner aussi des équations pour $\vec{D}$.*

Exercice 71 *Donner des équations pour la droite D de $\mathbf{R}^3$ passant par $P := (1,2,3)$ et $Q := (1,0,1)$. Donner aussi des équations pour $\vec{D}$.*

Exercice 72 *Trouver les valeurs de $a, b \in \mathbf{R}$ pour lesqueslles le point $M := (1,a,b)$ est sur la droite passant par $P := (0,1,0)$ et dirigée par $u := (1,1,1)$?*

Exercice 73 *Soit $D \subset \mathbf{R}^3$ la droite passant par $P := (0,1,0)$ dirigée par $u := (1,1,1)$. De même, soit $D' \subset \mathbf{R}^3$ la droite passant par $P' := (1,1,1)$ dirigée par $u' := (a,1,b)$. Déterminer en fonction de a et b les positions respectives de D et D'.*

Exercice 74 *Montrer que la droite D qui passe par $A := (4,9,4)$ et $B := (13,-3,7)$ rencontre la droite Δ d'équations*

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+4}{9} = \frac{z-1}{4}.$$

Exercice 75 *Donner une équation pour le plan H de $\mathbf{R}^3$ passant par $P := (1,2,-1)$ et dirigé par les vecteurs $u := (0,3,1)$ et $v := (1,0,-2)$. Donner aussi une équation pour $\vec{H}$.*

Exercice 76 *Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$ non-nuls. Donner une équation pour le plan $H \subset \mathbf{R}^3$ qui coupe les axes en $(a,0,0)$, $(0,b,0$ et $(0,0,c)$. Donner aussi une équation pour $\vec{H}$.*

Exercice 77 *Donner une équation pour le plan H de $\mathbf{R}^3$ qui passe par $(1,2,3)$, $(2,4,5)$ et $(4,3,1)$. Donner aussi une équation pour $\vec{H}$.*

Exercice 78 *Soient $m, p \in \mathbf{R}$. Montrer que les plans d'équations*

$$mx - (2m+1)y + (m+3)z - 2 = 0$$

et

$$4x + (m-12)y + 2pz - 4 = 0$$

se rencontrent dans $\mathbf{R}^3$.

Exercice 79 *On considére dans $\mathbf{R}^3$ les plans E_1, F_1, E_2 et F_2 d'équations respectives*

$$x + y + 1 = 0, x - y + 2z = 0,$$

$$2x + 2y + 1 = 0, 3x - 3y + 6z + 1 = 0.$$

On note $D_1 := E_1 \cap F_1$ et $D_2 := E_2 \cap F_2$.

Déterminer un vecteur directeur et un point de chacune des droites D_1 et D_2. Montrer que D_1 et D_2 sont paralléles et déterminer une équation du plan passant par ces deux droites.

Exercice 80 *Soit E un espace affine de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que f posséde un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$.*

Exercice 81 *Montrer qu'une application affine p est une projection si et seulement si l'ensemble F des points fixes est non-vide et $\vec{p}$ est une projection.*

Exercice 82 *Soient f une homothétie et g une translation. Déterminer $g \circ f \circ g^{-1}$ et $f \circ g \circ f^{-1}$.*

Exercice 83 *On se donne dans $\mathbf{R}^2$ les points*

$$O := (0,0), I := (1,0), J := (0,1).$$

On considére trois droites D, E, F d'équations respectives

$$x = a, y = b, x + y = c.$$

On note

$$A := D \cap E, B := E \cap F, C := D \cap F.$$

Montrer que si $A \neq O, B \neq I, C \neq J$, les droites $(OA), (IB), (JC)$ sont soit parallèles, soit concourantes en un point que l'on déterminera.

Exercice 84 *(difficile) Dans un plan, on se donne deux triangles $\{P, Q, R\}$ et $\{P', Q', R'\}$ formés de points tous distincts. On suppose que les droites (PP'), (QQ') et (RR') sont concourantes. On suppose aussi que*

$$(PQ) \parallel (P'Q'), (PR) \cap (P'R') = Q'', QR) \cap (Q'R') = P''.$$

Montrer que $(PQ) \parallel (P''Q'')$.

Exercice 85 *On se donne dans $\mathbf{R}^2$ les points*

$$P := (1,0), P' := (a,0), Q := (0,1),$$

$$Q' := (0,a), R := (b,b), R' := (c,c)$$

avec $a \neq 0, 1$, $b \neq c$, $c \neq ab$. Montrer que les droites (PP'), (QQ') et (RR') sont concourantes. Montrer que $(PQ) \parallel (P'Q')$, que (PR) et $(P'R')$ se coupent en un point Q'' et que (QR) et $(Q'R')$ se coupent en un point P''. Montrer pour finir que $(PQ) \parallel (P''Q'')$.

Exercice 86 *On se donne dans $\mathbf{R}^2$ les points*

$$P := (1,0), P' := (0,-1), Q := (-1,0),$$

$$Q' := (0,1), R := (a,0), R' := (0,b).$$

A quelle condition a-t-on $(QR') \parallel (Q'R)$? Montrer qu'alors $(PR') \parallel (P'R)$. Pouvait-on le prévoir ?

Exercice 87 *(difficile) Dans un plan, on se donne deux droites munies de points tous distincts P, Q, R pour l'une et P', Q', R' pour l'autre. On suppose que $(PQ') \parallel (P'Q)$, que (PR') et $(P'R)$ se coupent en Q'' et que (QR') et $(Q'R)$ se coupent en P''. Montrer que $(P''Q'') \parallel (PQ')$.*

Exercice 88 *On se donne dans* $\mathbf{R}^2$ *les points*

$$O := (0,0), I := (1,0), J := (0,1), K := (1,1).$$

Soient $A := (a,0)$ *et* $B := (b,1)$*. Montrer que si* (AJ) *et* (BI) *se coupent en un point* C *alors* (AK) *et* (BO) *se coupent en un point* $D \neq C$ *et que* (CD) *est paralléle à l'axe des* y*.*

Exercice 89 *(difficile) Dans un plan, on se donne* P, Q, R, P', Q', R'*, six points distincts tels que*

$$(PR') \parallel (RQ') \parallel (QP') \text{ et } (P'R) \parallel (R'Q) \parallel (Q'P).$$

Montrer que les droites (PP')*,* (QQ') *et* (RR') *sont paralléles ou concourantes.*

Exercice 90 *On se donne dans* $\mathbf{R}^2$ *les points*

$$O := (0,0), I := (1,0), J := (0,1).$$

Soient $A := (a,b)$*,* $B := (a,1)$ *et* $C := (1,b)$*. Montrer que les droites* (OA)*,* (IB) *et* (JC) *sont paralléles ou concourantes en un point à déterminer.*

Chapitre 4

Géométrie affine : 2éme partie

4.1 Hyperplan affine d'un espace vectoriel

4.1.1 Proposition

Soit E un espace vectoriel et H un hyperplan affine de E ne passant pas par l'origine. Une partie non-vide F de H est un sous-espace affine si et seulement si c'est la restriction à H d'un sous-espace vectoriel $\hat{F}$ de E. Celui-ci est alors unique et on a

$$\vec{F} = \hat{F} \cap \vec{H}.$$

En fait, si F est le sous-espace affine engendré par une partie non vide A de H, alors $\hat{F}$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par A.

Démonstration : Il est clair que si $\hat{F}$ est un sous-espace vectoriel de E tel que

$$F := \hat{F} \cap H \neq \emptyset,$$

alors F est un sous-espace affine de H. Choisissons alors $\Omega \in F$ et notons $D := (O\Omega)$ ou O est l'origine de E. Comme

$$H \cap D = \Omega,$$

on a

$$E = D \oplus H.$$

Tout élément de E s'écrit donc (de maniére unique)

$$w = \lambda\overrightarrow{O\Omega} + v$$

avec $\lambda \in K$ et $v \in \vec{H}$. Si $w \in \hat{F}$, alors $v \in \hat{F}$ car $\hat{F}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $\overrightarrow{O\Omega}$. On voit donc que

$$\overrightarrow{O\Omega} + v = \Omega + v \in \hat{F} \cap H = F,$$

si bien que $v \in \vec{F}$ et

$$\hat{F} \subset D + \vec{F}.$$

Comme l'inclusion réciproque est immédiate, on trouve que

$$\hat{F} = D \oplus \vec{F}.$$

On en déduit facilement l'identité

$$\vec{F} = \hat{F} \cap \vec{H}.$$

Supposons maintenant que F est le sous-espace affine de H engendré par une partie non vide A et que $\Omega \in A$. Soit $\hat{F}$ le sous-espace vectoriel de E engendré par A. On a bien sr $F \subset \hat{F}$ et donc aussi $\vec{F} \subset \hat{F}$ puisque $\hat{F}$ est un espace vectoriel. Il est aussi clair que $D \subset \hat{F}$ et on a donc

$$D + \vec{F} \subset \hat{F}.$$

Enfin, comme $A \subset D + \vec{F}$, on a égalité.

4.1.2 Proposition

Soit E (resp. F) un espace vectoriel et H (resp. G) un hyperplan ne passant pas par l'origine. Une application

$$f : H \to G$$

est affine si et seulement si elle se prolonge en une application linéaire

$$\hat{f} : E \to F.$$

Celle-ci est alors unique et induit

$$\vec{f} : \vec{H} \to \vec{G}.$$

De plus, on a toujours, avec des notations évidentes,

$$\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}.$$

Démonstration : Considérons une application

$$f : H \to G$$

et fixons $\Omega \in H$. Si $v \in \vec{H}$, on pose

$$\vec{f}(v) = \overrightarrow{f(\Omega)f(M)}$$

avec $M := \Omega + v$. Si f se prolonge en une application linéaire

$$\hat{f} : E \to F,$$

on a bien sr, pour $v \in \vec{H}$,

$$\hat{f}(v) = \vec{f}(v).$$

On en déduit que f est affine et que $\vec{f}$ est la restriction de $\hat{f}$ à $\vec{H}$. De plus, $\hat{f}$ est uniquement déterminée par f : en effet, tout élément de E s'écrit de maniére unique sous la forme

$$w = \lambda\overrightarrow{O\Omega} + v$$

avec et $\lambda \in K$ et $v \in \vec{H}$ et on a

$$\hat{f}(\lambda\overrightarrow{O\Omega} + v) = \lambda\hat{f}(\overrightarrow{O\Omega}) + \hat{f}(v) = \lambda\overrightarrow{Of(\Omega)} + \vec{f}(v)$$

Il reste à remarquer que si f est affine, et si on définit $\hat{f}$ par

$$\hat{f}(\lambda\overrightarrow{O\Omega} + v) := \lambda\overrightarrow{Of(\Omega)} + \vec{f}(v),$$

alors $\hat{f}$ est bien linéaire et prolonge f. Enfin, la derniére assertion est purement formelle : $\hat{g} \circ \hat{f}$ est une application linéaire qui prolonge $g \circ f$.

4.1.3 Proposition

Si E est un espace affine et F un espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{A}(E, F)$ des applications affines de E dans F est un sous-espace vectoriel de F^E. De plus, l'application

$$\mathcal{A}(E, F) \to L(\vec{E}, F), f \longmapsto \vec{f}$$

est linéaire et son noyau est composé des applications constantes.

Démonstration : Il est clair qu'une application affine est constante si et seulement si l'application linéaire associée est nulle. L'assertion sur le noyau en résulte.

Pour conclure, il suffit donc de vérifier que si

$$f, g : E \to F$$

sont deux applications affines et $\lambda, \mu \in K$, alors $\lambda f + \mu g$ est affine avec

$$\overrightarrow{\lambda f + \mu g} = \lambda\vec{f} + \mu\vec{g}.$$

On a pour tous $P, Q \in E$,

$$f(Q) = f(P) + \vec{f}(\overrightarrow{PQ})$$

et

$$g(Q) = g(P) + \vec{g}(\overrightarrow{PQ}).$$

On multiplie par λ et μ, respectivement et on additionne.

4.1.4 Définition

Soit E un espace affine de dimension > 0. Alors $\mathcal{A}(E, \vec{E})$ est l'espace des *champs affines* sur E. Si $u \in \vec{E}$, l'application

$$P \longmapsto u$$

est le *champ constant* de valeur u. Si $k \in K^*$ et $\Omega \in E$, l'application

$$P \longmapsto k\overrightarrow{P\Omega}$$

est le *champ central* de *centre* Ω et de *rapport* k. On note $\hat{E}$ l'ensemble des champs affines constants ou centraux.

4.1.5 Remarque

Si P est un point, on dit que $\widehat{P} = \mathcal{A}(P, K)$ est l'ensemble des champs affines sur P. Le champ

$$P \longmapsto k$$

est le champ central de rapport k si $k \neq 0$ et le champ constant si $k = 0$. Pour simplifier l'exposé, on négligera de traiter ce cas par la suite.

4.1.6 Proposition

Soit E un espace affine. Alors $\hat{E}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E, \vec{E})$ composé des champs affines X sur E tels que $\vec{X}$ soit une homothétie, l'identité ou nulle.

L'application

$$h : \hat{E} \to K$$

qui envoie un champ constant sur 0 et un champ de rapport k sur k est une forme linéaire non-nulle.

L'application

$$i : E \to \hat{E}$$

qui envoie P sur le champ de centre P et de rapport 1 induit un isomorphisme d'espaces affines entre E et l'hyperplan d'équation $\lambda = 1$.

L'application linéaire associée $\vec{i}$ est celle qui envoie u sur le champ constant de valeur u. C'est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\vec{E}$ et l'hyperplan d'équation $\lambda = 0$.

Démonstration : On a vu en 2.2.5Propositionsubsection.2.2.5 que l'ensemble des endomorphismes de $\vec{E}$ formé des homothéties, de l'identité et de l'application nulle forme un sous-espace vectoriel de $L(\vec{E})$. Son image inverse par l'application

$$X \longmapsto \vec{X}$$

est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E, \vec{E})$. Montrons que c'est $\hat{E}$. En effet, si $X \in \hat{E}$, alors X est soit constant auquel cas $\vec{X} = 0$, soit central de rapport k, auquel cas $\vec{X}$ est l'homothétie de rapport $-k$ ou l'identité.

Montrons la réciproque. Tout d'abord, on sait que si $\vec{X} = 0$, alors X est constant. Maintenant, si $\vec{X}$ est la multiplication par $k \neq 0$, alors $\vec{X}$ est bijectif et il en va de même de X. On peut donc écrire $X(\Omega) = 0$ et on a donc pour tout $P \in E$,

$$X(P) = -k\overrightarrow{P\Omega}.$$

L'application $X \longmapsto \vec{X}$ induit une application linéaire surjective de $\hat{E}$ sur l'espace formé des homothéties, de l'identité et de l'application nulle, qui est isomorphe à K. On obtient ainsi la forme linéaire h.

Il reste à vérifier les deux dernières assertions. Tout d'abord, il est clair que l'application qui envoie $u \in \vec{E}$ sur le champ constant Z de valeur u est linéaire et injective. Pour conclure, il suffit de vérifier que si X et Y sont les champs centraux de rapport 1 de centres P et Q respectivement et si $u := \overrightarrow{PQ}$, alors

$$Y = X + Z.$$

En un point $R \in E$, cela signifie que

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PQ}.$$

ce qui résulte de la relation de Chasles.

4.1.7 Remarque

Dans la suite, on identifiera E et $\vec{E}$ avec leurs images par i et $\vec{i}$ dans $\hat{E}$. Avec cette identification, on voit qu'il existe un espace vectoriel $\hat{E}$ et une forme linéaire h sur $\hat{E}$ tel que $\vec{E} = h^{-1}(0)$ et $E = h^{-1}(1)$. Remarquons alors que dans $\hat{E}$, si $P, Q \in E$, alors

$$Q - P = \overrightarrow{PQ} \in \vec{E}.$$

En particulier, cette notation est compatible avec l'écriture habituelle $Q = P + \overrightarrow{PQ}$.

4.1.8 Proposition

i) *Une partie non vide F de E est un sous-espace affine si et seulement si il existe un sous-espace vectoriel $F' \subset \hat{E}$ tel que*

$$F = F' \cap E.$$

Le sous-espace vectoriel F' est alors unique et s'identifie canoniquement à $\hat{F}$. De plus, on a

$$\vec{F} = \hat{F} \cap \vec{E}.$$

Enfin, si F est engendré par une partie non vide A de E, alors $\hat{F}$ est le sous-espace vectoriel de $\hat{E}$ engendré par A.

ii) *Une application*

$$f : E \to F$$

est affine si et seulement si elle se prolonge en une application linéaire

$$\hat{f} : \hat{E} \to \hat{F}.$$

Celle-ci est alors unique et induit $\vec{f}$ sur $\vec{E}$. De plus, on a toujours

$$\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}.$$

Démonstration : C'est une conséquence de ce qui précéde.

4.2 Barycentres

4.2.1 Proposition

Soient

$$P_1, \ldots, P_n \in E$$

et

$$\lambda_1, \dots \lambda_n \in K.$$

Alors,

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n \in E \Leftrightarrow \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1.$$

Démonstration : Effectivement, on a

$$h(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

et

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n \in E$$

si et seulement si

$$h(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n) = 1.$$

4.2.2 Définition

On dit alors que

$$P := \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$$

est le *barycentre* de

$$P_1, \dots, P_n$$

affecté des *coefficients*

$$\lambda_1, \dots \lambda_n.$$

On dit *centre de gravité* si $\mathrm{Car} K \not| n$ et

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n (= \frac{1}{n}).$$

Pour $n = 2$, le centre de gravité est le *milieu*. Enfin, dans un triangle, les droites joignant un sommet au milieu du cté opposé sont les *médianes*.

4.2.3 Proposition

Soient $P, P_1, \dots, P_n$ des points de E et $\lambda_1, \dots \lambda_n \in K$ avec

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1.$$

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le barycentre de $P_1, \dots, P_n$ affecté des coefficients $\lambda_1, \dots \lambda_n$ est P.

ii) Pour tout $Q \in E$, on a

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda_1 \overrightarrow{P_1Q} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{P_nQ}.$$

iii) On a

$$\lambda_1 \overrightarrow{PP}_1 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{PP}_n = 0.$$

Démonstration : On fait une démonstration circulaire : Comme

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1,$$

si

$$\lambda_1 P + \cdots + \lambda_n P = P,$$

on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} = Q - P &= \lambda_1(Q - P_1) + \cdots + \lambda_n(Q - P_n)\\ &= \lambda_1\overrightarrow{P_1Q} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{P_nQ}.\end{aligned}$$

Si dans la seconde assertion, on prend $Q = P$, on trouve la troisiéme. Enfin, de

$$\lambda_1\overrightarrow{PP}_1 + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{PP}_n = 0,$$

on déduit aisément que

$$\lambda_1 P + \cdots + \lambda_n P = P.$$

4.2.4 Proposition

Pour qu'une partie non-vide F d'un espace affine E soit un sous-espace affine, il faut et suffit que tout barycentre de points de F soit dans F. En fait, le sous-espace affine engendré par une partie non-vide A de E est l'ensemble des barycentres de points de A.

Démonstration : La premiére assertion est conséquence immédiate de la seconde. De plus, l'ensemble F des barycentres de points de A est l'intersection de E avec le sous-espace vectoriel de $\hat{E}$ engendré par A, c'est à dire $\hat{F}$. Il résulte donc de 4.1.8Propositionsubsection.4.1.8, 1 que F est le sous-espace affine de E engendré par A.

4.2.5 Proposition

Pour qu'une application

$$f : E \to F$$

soit affine, il faut et suffit qu'elle préserve les barycentres.

Démonstration : Si f est affine, elle se prolonge en une application linéaire

$$\hat{f} : \hat{E} \to \hat{F}.$$

La condition est donc clairement nécessaire. Réciproquement. Supposons que f préserve les barycentres et fixons $\Omega \in E$. Montrons que

$$\vec{f} : \overrightarrow{\Omega P} \longmapsto \overrightarrow{f(\Omega)f(P)}$$

est linéaire. Soient donc $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in K$. On a

$$\lambda\overrightarrow{\Omega P} + \mu\overrightarrow{\Omega Q} = \overrightarrow{\Omega R}$$

avec
$$R = \lambda P + \mu Q + (\lambda + \mu - 1)\Omega.$$
Comme f préserve les barycentres, on a
$$f(R) = \lambda f(P) + \mu f(Q) + (\lambda + \mu - 1)f(\Omega)$$
et il suit que
$$\overrightarrow{f(\Omega)f(R)} = \lambda\overrightarrow{f(\Omega)f(P)} + \mu\overrightarrow{f(\Omega)f(Q)}.$$

4.2.6 **Proposition**(car $K \neq 2, 3$)

Les médianes d'un triangle sont concourantes au centre de gravité.

Démonstration : Soit $\{P, Q, R\}$ le triangle, G son centre de gravité et I le milieu de $\{Q, R\}$. On a alors
$$G = \frac{1}{3}(P + Q + R) = \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}I \in (PI).$$
Les médianes se coupent donc bien en G.

4.2.7 **Proposition**(car $K \neq 2$)

Soit $\{P, Q, R\}$ un triangle et P', Q', R' les milieux des ctés opposés à aux sommets. Alors,
$$(P', Q', R', Q)$$
est un parallélogramme.

Démonstration : Effectivement, on a
$$\overrightarrow{P'Q'} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RR})$$
$$= \frac{1}{4}(2\overrightarrow{QP}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QR'}.$$

4.2.8 **Proposition** (car $K \neq 2$)

Un quadruplé
$$(P, Q, R, S)$$
est un parallélogramme si et seulement si le milieu de $\{P, R\}$ est aussi le milieu de $\{Q, S\}$.

Démonstration : Dire que
$$\frac{P + R}{2} = \frac{Q + S}{2}$$
est équivalent à
$$0 = Q - P + S - R = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}.$$

4.3 Repéres

4.3.1 Proposition

Pour un systéme non vide S d'éléments d'un espace affine E, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) S engendre $\hat{E}$ comme espace vectoriel.

ii) S engendre E comme espace affine.

iii) Pour tout $P \in S$, le systéme

$$\{\overrightarrow{PQ}, Q \in S\}$$

engendre $\vec{E}$.

iv) Il existe $P \in S$ tel que

$$\{\overrightarrow{PQ}, Q \in S\}$$

engendre $\vec{E}$.

Démonstration : On fait une démonstration circulaire : on sait déjà que les deux premiéres assertions sont équivalentes.

Supposons maintenant que S engendre E et soit P un point de E. Si

$$u =: \overrightarrow{PQ} \in \vec{E},$$

alors Q est le barycentre de points Q_i de S affectés de coefficients λ_i et on a donc

$$u = \overrightarrow{PQ} = \lambda_1 \overrightarrow{PQ_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{PQ_n}.$$

Enfin, supposons donné $P \in S$ tel que

$$\{\overrightarrow{PQ}, Q \in S\}$$

engendre $\vec{E}$. Comme $\vec{E}$ est un hyperplan de $\hat{E}$ et que $P \notin \vec{E}$, il est clair que

$$\{\overrightarrow{PQ}, Q \in S\} \cup \{P\}$$

engendre $\hat{E}$. Comme

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P,$$

il suit immédiatement que S engendre $\hat{E}$.

4.3.2 Définition

On dit alors que le systéme S est *affinement générateur*.

4.3.3 Proposition

Pour un systéme non vide S d'éléments d'un espace affine E, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) S est un systéme libre de $\hat{E}$.

ii) Pour tout $P \in S$, le systéme

$$\{\overrightarrow{PQ}, Q \in S, Q \neq P\}$$

est libre dans $\vec{E}$.

iii) Il existe $P \in S$ tel que

$$\{\overrightarrow{PQ}, Q \in S, Q \neq P\}$$

soit libre dans $\vec{E}$.

Démonstration : Supposons que S est un systéme libre de $\hat{E}$ et donnons nous une équation

$$\lambda_1 \overrightarrow{PQ_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{PQ_n} = 0$$

avec $P, Q_i \in S$ tous distincts. On a alors

$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)P - \lambda_1 Q_1 - \cdots - \lambda_n Q_n = 0$$

et il suit que pour tout i, on a $\lambda_i = 0$.

Réciproquement, si

$$\{\overrightarrow{PQ}, Q \in S\}$$

est libre dans $\vec{E}$ et

$$\lambda P + \lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_n Q_n = 0,$$

alors

$$\lambda + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$$

et il suit que

$$\lambda_1 \overrightarrow{PQ_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{PQ_n} = 0$$

si bien que pour tout i, on a $\lambda_i = 0$ et donc aussi $\lambda = 0$.

4.3.4 Définition

On dit alors que le systéme S est *affinement libre*.

4.3.5 Proposition

Pour un systéme non vide S d'éléments d'un espace affine E, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Tout $P \in E$ s'écrit de maniére unique comme barycentre d'éléments de S.

ii) S est affinement libre et affinement générateur.

iii) S est une base de $\hat{E}$.

iv) *Pour tout $P \in S$, le systéme*

$$\{\overrightarrow{PQ}, Q \in S, Q \neq P\}$$

est une base de $\vec{E}$.

v) *Il existe $P \in S$ tel que*

$$\{\overrightarrow{PQ}, Q \in S, Q \neq P\}$$

soit une base de $\vec{E}$.

On a alors $|S| = \dim E + 1$.

Démonstration : Grce à ce qui précéde, il suffit de montrer que la premiére condition est équivalente à l'une des trois autres. Le fait que la seconde assertion implique la premiére est clair. Finalement, supposons que tout point de E s'écrit de maniére unique comme barycentre d'éléments de S. Si on a une égalité du type

$$\lambda_1 \overrightarrow{PQ_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{PQ_n} = 0$$

avec $P, Q_i \in S$ tous distincts et, disons, $\lambda_n \neq 0$, alors

$$Q_n = \frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}{\lambda_n} P - \frac{\lambda_1}{\lambda_n} Q_1 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} Q_{n-1}.$$

Contradiction.

4.3.6 Définition

On dit alors que le systéme S est un *repére affine* de E ou que

$$\{P\} \cup \{\overrightarrow{PQ}, Q \in S, Q \neq P\}$$

est un *repére cartésien*. Comme pour les bases, on ordonne implicitement les éléments d'un repére.

4.3.7 Définition

Les *coordonnées barycentriques* d'un point P dans un repére affine sont les composantes de P, vu comme vecteur de $\hat{E}$, dans la base correspondante. Les *coordonnées cartésiennes* de P dans un repére cartésien centré en Ω sont les composantes de $\overrightarrow{\Omega P}$ dans la base de $\vec{E}$ associée au repére.

4.3.8 Remarque

On peut expliciter cette définition ainsi : Dans le repére affine

$$\{P_0, \ldots, P_n\},$$

le point

$$P := \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n$$

a pour coordonnées barycentriques

$$(\lambda_0, \ldots, \lambda_n).$$

On a bien sur

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1.$$

De même, dans le repére cartésien

$$\{\Omega, e_1, \ldots, e_n\},$$

le point

$$P := \Omega + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$$

a pour coordonnées cartésiennes

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

4.3.9 Proposition

Soient E et F deux espaces affines de dimension finie. Soient

$$\{P_0, \ldots P_n\}$$

un repére affine de E et

$$Q_0, \ldots Q_n, \in F.$$

Alors, il existe une application affine

$$f : E \to F$$

et une seule telle que

$$f(P_0) = Q_0, \ldots, f(P_n) = Q_n.$$

De plus, f est surjective (resp. injective, resp. bijective) si et seulement si

$$\{Q_0, \ldots Q_n\}$$

est générateur (resp. libre et formé d'éléments distincts, resp. un repére).

Démonstration : En effet, il existe une application linéaire

$$\hat{f} : \hat{E} \to \hat{F}$$

et une seule telle que

$$\hat{f}(P_0) = Q_0, \ldots, f(P_n) = Q_n.$$

Sa restriction f à E est affine et c'est bien sûr la seule ayant la propriété annoncée. Les autres assertions se démontrent de la même façon en utilisant les résultats analogues d'algébre linéaire.

4.4 Le théoréme de Thales

4.4.1 Définition

Soit D une droite affine munie d'un repére cartésien $\{\Omega, e\}$. La *mesure algébrique* $\overline{PQ}$ de $\overrightarrow{PQ}$ est définie par la formule

$$\overrightarrow{PQ} = \overline{PQ}e.$$

4.4.2 Proposition

Soient P, Q et R trois points d'une droite D avec $P \neq Q$. Alors,

i) Le rapport

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}$$

ne dépend pas du choix du repére.

ii) Soit

$$f : D \to D'$$

l'application affine qui envoie P et Q sur P' et Q', respectivement, avec $Q' \neq P'$ sur D'. Alors

$$f(R) = R' \Leftrightarrow \frac{\overline{P'R'}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}.$$

Démonstration : Il est clair que

$$\overrightarrow{PR} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}\overrightarrow{PQ}.$$

D'o la premiére assertion. La seconde résulte alors immédiatement de la linéarité de $\vec{f}$.

4.4.3 Corollaire (Théoréme de Thales)

Soient D et D' deux droites distinctes d'un plan munies de points distincts P, Q, R et P', Q', R', respectivement. Supposons que les trois droites (PP'), (QQ') et (RR') sont paralléles. Alors

$$\frac{\overline{P'R'}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}.$$

Le résultat reste valable si $P = P'$ et

$$(QQ') \parallel (RR').$$

Démonstration : En effet, on sait que la projection sur D' de direction $\overrightarrow{(PP')}$ est affine.

4.5 Repére affine dans le plan

Dans cette section, E est un plan rapporté à un repére affine.

4.5.1 Proposition

Les points de coordonnées barycentriques (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) *et* (z_1, z_2, z_3) *sont alignés ssi*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration : Les points sont alignés si et seulement si le sous-espace affine engendré est une droite, cela signifie que le sous-espace vectoriel engendré dans $\hat{E}$ est un plan, et donc que les vecteurs sont linéairement dépendants.

4.5.2 Proposition

Les points de coordonnées barycentriques (x, y, z) *satisfaisant*

$$ax + by + cz = 0$$

avec a, b, c *non tous nuls et non tous égaux, forment une droite* D*. Et réciproquement, toute droite* D *est de cette forme avec* a, b, c *uniquement déterminés a un facteur prés.*

Démonstration : En effet, on sait qu'une droite D de E est l'intersection de E avec un plan vectoriel H de $\hat{E}$. Le plan H a une équation de la forme

$$ax + by + cz = 0$$

avec a, b, c non tous nuls. Et ceux ci sont uniquement déterminés à un facteur prés. Il reste à traduire la propriété que E et H se rencontrent. En fait, si ceux ci ne se rencontrent pas, ils sont nécessairement paralléles (théoréme d'incidence), ce qui signifie que $H = \vec{E}$, ou encore que

$$a = b = c,$$

puisque h envoie le vecteur de composantes (x, y, z) sur

$$x + y + z.$$

4.5.3 Définition

On dit alors que

$$ax + by + cz = 0$$

est une *équation* pour D.

4.5.4 Proposition

La droite passant par les points de coordonnées barycentriques (x_1, x_2, x_3) *et* (y_1, y_2, y_3) *a pour équation*
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x \\ x_2 & y_2 & y \\ x_3 & y_3 & z \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration : En effet, cette condition exprime que les points sont alignés.

4.5.5 Proposition

Deux droites d'équations respectives
$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$
et
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$
sont paralléles si et seulement si
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration : Notons D_1 et D_2 respectivement, ces droites que l'on peut bien sr supposer distinctes. On sait que notre condition signifie que
$$\hat{D}_1 \cap \hat{D}_2 \cap \vec{E} \neq 0.$$
Comme
$$\hat{D}_1 \cap \hat{D}_2 \cap \vec{E} = \vec{D}_1 \cap \vec{D}_2,$$
on trouve
$$\vec{D}_1 = \vec{D}_2,$$
c'est à dire
$$D_1 \parallel D_2.$$

4.5.6 Proposition

Trois droites d'équations respectives
$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$
et
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

sont paralléles ou concourantes ssi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration : Notons D_1, D_2 et D_3 respectivement, ces droites que l'on peut bien sr supposer distinctes. On sait que notre condition signifie que

$$\hat{D}_1 \cap \hat{D}_2 \cap \hat{D}_3 \neq 0.$$

Cette intersection ne peut être qu'une droite vectorielle Δ de $\hat{E}$. Il se présente alors deux cas : Si $\Delta \subset \vec{E}$, alors

$$\Delta = \vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \vec{D}_3$$

et les droites sont donc paralléles. Sinon, on a

$$\Delta \cap D_1 = \Delta \cap D_2 = \Delta \cap D_3 = \Delta \cap E$$

qui est réduit à un point.

4.6 Géométrie affine sur un corps ordonné

Dans ce paragraphe, K est un corps ordonné, par exemple $\mathbf{R}$.

4.6.1 Définition

Soit H un hyperplan d'un espace affine E sur K d'équation $f = 0$. On dit alors que

$$\{P \in E, f(P)0\}$$

est un *demi-espace fermé* de *bord* H. On définit de maniére analogue les *demi-espaces ouverts*. On dit *demi-droite* ou *demi-plan* si E est une droite ou un plan.

4.6.2 Remarque

Il y a deux demi-espaces associés a un hyperplan. Par exemple, si $\{\Omega, e\}$ est un repére sur une droite D, le point Ω détermine les deux demi-droites

$$\{\Omega + \lambda e, \lambda 0\}$$

et

$$\{\Omega + \lambda e, \lambda \leq 0\}.$$

4.6.3 Définition

Si $P, Q \in E$, le *segment fermé* $[P, Q]$ d'*extrémités* P et Q est l'ensemble des barycentres de P et Q affectés de coefficients $\lambda, \mu 0$. On définit de maniére analogue les *segments semi-ouverts* $[P, Q[$ et $]P, Q]$ ainsi que le *segment ouvert* $]P, Q[$. Enfin, une partie S d'un espace affine E sur K est *convexe* si pour tout $P, Q \in X$, on a

$$[P, Q] \subset S.$$

4.6.4 Proposition

i) Une partie d'un espace affine E sur K est convexe ssi elle est stable par barycentres à coefficients positifs.

ii) L'image d'un convexe par une application affine est convexe.

iii) Toute intersection de convexes est convexe.

iv) Tout espace affine, segment, ou demi-espace est convexe.

Démonstration : Dans la premiére assertion, la condition est clairement suffisante. Pour la réciproque, on procéde par récurrence en utilisant l'associativité des barycentres. La seconde assertion résulte du fait que les applications affines préservent les barycentres. La stabilité par intersection est claire. De même que le fait qu'un espace affine est convexe. L'assertion sur les segments résulte aussi de l'associativité des barycentres. Enfin, pour vérifier qu'un demi-espace est convexe, on se donne une forme linéaire f, deux points P et Q tels que $f(P), f(Q)0$ et $\lambda, \mu0$. On a alors

$$f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)0.$$

4.6.5 Définition

Le plus petit convexe contenant une partie S de E est l'*enveloppe convexe* de S.

4.6.6 Proposition

Les parties convexes d'une droite sont la droite, les segments et les demi-droites. Un segment fermé est l'enveloppe convexe de ses extrémités.

Démonstration : Exercice.

4.6.7 Définition

Soient

$$\{P_0, \ldots, P_n\}$$

et

$$\{Q_0, \ldots, Q_n\}$$

deux repéres de E et f l'unique application affine qui échange ces repéres. On dit que ces repéres ont même *orientation* si

$$\det(\vec{f})0.$$

Orienter E, c'est choisir une classe de repéres ayant même orientation.

4.6.8 Théoréme fondamental de la géométrie affine ($K = \mathbf{R}$)

Soient E et F deux espaces affines réels de dimension au moins deux. Une bijection

$$f : E \to F$$

est affine si et seulement si elle transforme trois points alignés en trois points alignés.

Démonstration : Exercice (trés difficile).

4.7 Exercices

Exercice 91 *(sur* $\mathbf{R}$*) On dit qu'une application*

$$s : E \to E$$

est une symétrie *si*

$$s^2 = \mathrm{Id}_E.$$

Montrer qu'une application affine s *est une symétrie si et seulement si l'ensemble* F *des points fixes de* s *est non vide et* $\vec{s}$ *est une symétrie.*

Exercice 92 *(sur* $\mathbf{R}$*) Montrer que si* s *est une symétrie, alors l'application* p *qui à* P *associe le milieu de*

$$\{P, s(P)\}$$

est une projection et que

$$\vec{p} := (\vec{s} + \mathrm{Id}_{\vec{E}})/2.$$

Exercice 93 *Montrer que si* p *est une projection, alors l'application* s *qui envoie* P *sur le barycentre de*

$$\{p(P), P\}$$

affecté des coefficients 2 *et* -1 *est une symétrie et que*

$$\vec{s} := 2\vec{p} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}$$

Exercice 94 *Soit* H *un plan affine rapporté à un repére cartésien. Soient* $a, b \in \mathbf{R}$ *avec* $a \neq 0$ *et*

$$f : H \longrightarrow H$$

l'application qui envoie le point de coordonnées (x, y) *sur le point de coordonnées*

$$(ay + b, \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}).$$

Montrer que f *est une symétrie dont on déterminera les invariants.*

Exercice 95 *Soient* I*,* J*,* K *et* L *les milieux respectifs de* $\{P, Q\}$*,* $\{Q, R\}$*,* $\{R, S\}$ *et* $\{S, P\}$*. Montrer que*

$$(I, J, K, L)$$

est un parallélogramme.

Exercice 96 *Soient* f *et* g *deux dilatations. Déterminer les invariants de* $g \circ f$ *(vecteur de translation ou centre et rapport) en fonction de ceux de* f *et de* g*.*

Exercice 97 *Soit* A *un point et* f *l'application qui envoie* M *sur le milieu de* $\{A, M\}$*. Montrer que* f *est une homothétie dont on déterminera les invariants.*

Exercice 98 *Soit A, B deux points et f l'application qui envoie M sur le centre de gravité de*

$$\{A, B, M\}.$$

Montrer que f est une homothétie dont on déterminera les invariants.

Exercice 99 *Montrer que f est une dilatation si et seulement si il existe α, β, γ avec*

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

et $A, B \in E$ tels que pour tout $M \in E$, $f(M)$ soit le barycentre de

$$A, B, M$$

affectés des coefficients α, β, γ.

Exercice 100 *Soit D une droite affine sur $\mathbf{R}$ et*

$$f : D \longrightarrow D$$

une application affine distincte de l'identité telle que pour tout point $M \in D, (f \circ f)(M)$ soit le milieu de $\{M, f(M)\}$. Montrer que f est une homothétie dont on déterminera le rapport.

Exercice 101 *Soit H un plan affine rapporté à un repére affine. Montrer qu'une application*

$$f : H \longrightarrow H$$

est une dilatation si et seulement si il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ avec

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 1$$

tels que le point de coordonnées barycentriques (x, y, z) soit envoyé sur le point de coordonnées barycentriques

$$((1 - \beta - \gamma)x + \alpha(y + z),$$

$$(1 - \alpha - \gamma)y + \beta(x + z),$$

$$(1 - \alpha - \beta)z + \gamma(x + y)).$$

Déterminer alors ses invariants.

Exercice 102 *Dans un plan, soient I le milieu de $\{A, B\}$ et I' le milieu de $\{A', B'\}$. Montrer que si $A' \neq A$ et $B' \neq B$, alors les droites (AA'), (BB') et (II') sont paralléles ou concourantes.*

Exercice 103 *Soit*

$$T := \{A, B, C\}$$

un triangle et A', B' et C' situés sur les cotés opposés à A, B et C, respectivement. Montrer que T et

$$\{A', B', C'\}$$

ont même centre de gravité si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ *tels que*

$$A' = \lambda B + \mu C,$$

$$B' = \lambda C + \mu A$$

et

$$C' = \lambda A + \mu B.$$

Les points A', B' *et* C' *peuvent ils être alignés ?*

Exercice 104 *Démontrer le théoréme de Ceva : Si* A, B, C *forment un repére affine et*

$$A'(a_1, a_2, a_3), B'(b_1, b_2, b_3), C'(c_1, c_2, c_3)$$

distincts de A, B, C *de coordonnées respectives , alors les droites* (AA'), (BB') *et* (CC') *sont paralléles ou concourantes si et seulement si*

$$a_2 b_3 c_1 = a_3 b_1 c_2.$$

Exercice 105 *Montrer que si* A, B, C *forment un repére affine et*

$$D : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

est une droite, alors

$$D \parallel (AB) \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

En déduire que si

$$A'(a_1, a_2, a_3) \neq B'(b_1, b_2, b_3),$$

alors

$$(AB) \parallel (A'B') \Leftrightarrow a_3 = b_3.$$

Exercice 106 *Déduire le théoréme de Desargues du théoréme de Ceva.*

Exercice 107 *Soient* A, B, C, A', B', C' *tous distincts tels que*

$$(AB) \parallel (B'C) \parallel (C'A')$$

et

$$(AC) \parallel (C'B) \parallel (B'A').$$

Montrer que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ *sont paralléles ou concourantes.*

Exercice 108 *Démontrer le théoréme de Ménélas : Si* A, B, C *forment un repére affine et*

$$A'(a_1, a_2, a_3), B'(b_1, b_2, b_3), C'(c_1, c_2, c_3)$$

avec $A' \in (BC), B' \in (AC), C' \in (AB)$, *alors* A, B, C *sont alignés si et seulement si*

$$a_2 b_3 c_1 = -a_3 b_1 c_2.$$

Exercice 109 *Soient A, B, C, A', B', C' tous distincts tels que*

$$(AB) \parallel (B'C) \parallel (C'A')$$

et

$$(AC) \parallel (C'B) \parallel (B'A').$$

Montrer que

$$A'' := (BC) \cap (B'C'),$$

$$B'' := (AC) \cap (A'C'),$$

et

$$C'' := (AB) \cap (A'B')$$

sont alignés.

Exercice 110 *Soit E un plan affine muni d'un repére affine $\{A, B, C\}$ et G le centre de gravité du repére. Si P est un point de E distinct de G, de coordonnées (a, b, c), on note D_P la droite d'équation*

$$ax + by + cz = 0.$$

i) Montrer que D_P ne passe pas par G et que toute droite ne passant pas par G est de la forme D_P pour un unique P.

ii) Montrer que trois points P, Q, R distincts de G sont alignés ssi les droites D_P, D_Q, D_R sont paralléles ou concourantes.

iii) Soient

$$P \neq Q \in E$$

distincts de G. Montrer que

$$D_P \parallel D_Q \Leftrightarrow G \in (PQ).$$

iv) Soient

$$P \neq Q \in E$$

avec $G \notin (PQ)$. Montrer que

$$(PQ) = D_R \Leftrightarrow R = D_P \cap D_Q.$$

Chapitre 5

Géométrie Euclidienne

5.1 Orthogonalité dans les espaces affines euclidiens

5.1.1 Définition

Un *espace affine euclidien* est un espace affine de dimension finie sur $\mathbf{R}$ dont l'espace directeur est muni d'un produit scalaire $\langle -, - \rangle$. Un repére de E est *orthonormé* si la base correspondante de E est orthonormale.

5.1.2 Remarque

Si F est un sous-espace affine d'un espace affine euclidien E, c'est de maniére naturelle un espace affine euclidien : en effet, $\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ et est donc muni, par restriction, d'un produit scalaire.

5.1.3 Définition

Soit E un espace affine euclidien. On dit que deux sous-espace affine F et G de E sont *orthogonaux*, et on écrit $F \perp G$, si $\vec{F} \perp \vec{G}$. On dit aussi que F et G sont *perpendiculaires* si $\vec{F}^{\perp} \perp \vec{G}^{\perp}$.

5.1.4 Remarque

On vérifie aisément que

$$(PQ) \perp F \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in \vec{F}^{\perp}$$

et que

$$(PQ) \perp (P'Q') \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{P'Q'}.$$

5.1.5 Proposition

i) Si $F \perp G$ *et* $F' \parallel F$*, alors* $F' \perp G$.

ii) Si

$$\dim F + \dim G = \dim E,$$

alors $F \perp G$ si et seulement si F et G sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{F}^{\perp} = \vec{G}$.

iii) Si $F \perp G$ et $F' \perp G$ avec

$$\dim F = \dim F' = \dim E - \dim G,$$

alors $F \parallel F'$.

iv) étant donné un sous-espace affine F et un point $P \in E$, il existe un unique supplémentaire G orthogonal à F passant par P.

Démonstration : Si $F \perp G$ et $F \parallel F'$, alors $\vec{F'} = \vec{F}$ et $\vec{F} \perp \vec{G}$, donc $\vec{F'} \perp \vec{G}$ et alors $F' \perp G$.

Supposons que

$$\dim F + \dim G = \dim E.$$

Si $F \perp G$ alors $\vec{F} \perp \vec{G}$ et donc $\vec{G} \subset \vec{F}^{\perp}$. Comme ces deux espaces ont même dimension, on a $\vec{G} = \vec{F}^{\perp}$. Et on a un résultat analogue pour la perpendicularité : on a $\vec{F}^{\perp} \perp \vec{G}^{\perp}$ et donc

$$\vec{F}^{\perp} \subset (\vec{G}^{\perp})^{\perp} = \vec{G}.$$

Dans les deux cas, la réciproque est immédiate.

La troisiéme assertion en résulte car on a clairement

$$\vec{F} = \vec{G}^{\perp} = \vec{F'}.$$

La derniére assertion est claire car

$$\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{F}^{\perp}.$$

5.1.6 Définition

Si $P \neq Q$, l'*hyperplan médian* de $\{P, Q\}$ est l'hyperplan perpendiculaire à (PQ) passant par le milieu de $\{P, Q\}$. On dit *médiatrice* si E est un plan. La *médiatrice* du cté (QR) d'un triangle $\{P, Q, R\}$ est la médiatrice de $\{Q, R\}$ dans le plan du triangle.

La droite perpendiculaire à un cté d'un triangle et passant par le sommet opposé est une *hauteur*.

Un triangle $\{P, Q, R\}$ est *triangle rectangle* en P si $(PQ) \perp (PR)$. On dit alors que (QR) est l'*hypoténuse*.

Un *rectangle* est un parallélogramme

$$(P, Q, R, S)$$

tel que $P = Q$, $P = S$ ou alors $(PQ) \perp (PS)$.

5.1.7 Proposition

Dans un triangle, les médiatrices sont concourantes. Les hauteurs aussi.

Démonstration : On se donne donc un triangle

$$T := \{P, Q, R\}.$$

On note P', Q', R' les milieux des ctés opposés à (QR), (PR), (PQ), respectivement. On sait que

$$(R', Q', P', Q)$$

est un parallélogramme et on en déduit que si $O \in E$, alors

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}.$$

En particulier, si O est sur la médiatrice de $\{P, R\}$, on a

$$\langle \overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{PR} \rangle = \frac{1}{2}\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \rangle.$$

De même, si O est sur la médiatrice de $\{P, Q\}$, on a

$$\langle \overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{PQ} \rangle = \frac{1}{2}\langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ} \rangle.$$

Comme ces deux médiatrices ne peuvent pas être paralléles, elles se rencontrent bien en un point O et on a alors

$$\langle \overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{QR} \rangle = \langle \overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{PR} \rangle - \langle \overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{PQ} \rangle =$$

$$\frac{1}{2}\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \rangle - \frac{1}{2}\langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0.$$

On voit donc que O est aussi sur la médiatrice de $\{P, Q\}$.

Donc, nous venons de voir que les médiatrices sont concourantes. Nous allons en déduire qu'il en va de même des hauteurs. On considére les droites D, E, F paralléles, respectivement à (QR), (PR), (PQ) et passant par P, Q, R, respectivement. On note

$$P' := E \cap F,$$

$$Q' := D \cap F$$

et

$$R' := D \cap E.$$

On obtient ainsi un nouveau triangle

$$T' := \{P', Q', R'\}.$$

Par construction,

$$(P, Q, R, Q')$$

et

$$(P, R, Q, R')$$

sont des parallélogrammes. Il suit que

$$\overrightarrow{PQ'} + \overrightarrow{PR'} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RQ} = 0$$

et donc que P est le milieu de $\{Q', R'\}$. On a bien sr un résultat analogue pour Q et R. Il suit que les hauteurs de T sont les perpendiculaires aux ctés de T' passant par leur milieu, c'est à dire, les médiatrices de T'. Elles sont donc bien concourantes.

5.1.8 Définition

L'intersection des hauteurs d'un triangle est l'*orthocentre*.

5.1.9 Proposition

Un triangle est rectangle en l'un des sommet si et seulement si les médiatrices se coupent sur le cté opposé.

Démonstration : On se donne donc un triangle

$$T := \{P, Q, R\}$$

et on note P', Q', R' les milieux des ctés opposés à (QR), (PR), (PQ), respectivement. On sait que

$$(R', P', Q', P)$$

est un parallélogramme. Donc

$$(PQ) = (PR') \parallel (P'Q').$$

Or, dire que les médiatrices se coupent sur (QR) signifie que $(P'Q') \perp (PR)$, ce qui est donc équivalent à $(PQ) \perp (PR)$, qui signifie que le triangle est rectangle en P.

5.2 Distance dans les espaces affines euclidiens

5.2.1 Définition

Soit E un ensemble. Une distance sur E est une application $d : E \times E \to \mathbf{R}$ telle que

a) Si $x, y \in E$, alors $d(y, x) = d(x, y)$

b) Si $x, y \in E$, alors $d(x, y) > 0 \Leftrightarrow x \neq y$

c) Si $x, y, z \in E$ alors $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Si $A, B \subset E$, la *distance* entre A et B est

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y), x \in A, y \in B\}.$$

Enfin, un *espace métrique* est un ensemble E muni d'une distance d.

5.2.2 Proposition

Si E est un espace affine euclidien, la fonction

$$E \times E \to \mathbf{R}, (P, Q) \longmapsto PQ := \|\overrightarrow{PQ}\|$$

est une distance sur E.

Démonstration : On a

$$QP = \|\overrightarrow{QP}\| = \| - \overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = PQ.$$

On a

$$PQ > 0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{PQ}\| > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \neq 0 \Leftrightarrow P \neq Q.$$

Enfin, on a

$$PR = \|\overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\| \leq$$

$$\|\overrightarrow{PQ}\| + \|\overrightarrow{QR}\| = PQ + QR.$$

5.2.3 Proposition

i) *On a toujours*

$$QR^2 = PQ^2 + PR^2 - 2\langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ} \rangle.$$

ii) *(Théoréme de Pythagore) Un triangle $\{P, Q, R\}$ est rectangle en P si et seulement si*

$$QR^2 = PQ^2 + PR^2.$$

iii) *(Régle du parallélogramme) Soit*

$$(P, Q, R, S)$$

un parallélogramme. Alors

$$PR^2 + QS^2 = 2PQ^2 + 2PS^2.$$

iv) *Soient $P \neq Q$ et $R \neq S$. Alors*

$$(PQ) \perp (RS) \Leftrightarrow PR^2 - QR^2 = PS^2 - QS^2.$$

Démonstration : On a

$$QR^2 = \|\overrightarrow{QR}\|^2 = \|\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}\|^2 =$$

$$\|\overrightarrow{PR}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ} \rangle + \|\overrightarrow{PQ}\|^2 =$$

$$PQ^2 + PR^2 - 2\langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ} \rangle.$$

De cette formule, on déduit que la relation de pythagore dans le triangle est équivalente à

$$\langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0,$$

c'est à dire $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PQ}$ ou encore $(PR) \perp (PQ)$, et donc finalement au fait que $\{P, Q, R\}$ est rectangle en P.

Si on se donne quatre points P, Q, R, S, on a

$$PR^2 + QS^2 = QP^2 + QR^2 -$$

$$2\langle \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR} \rangle + RQ^2 + RS^2 - 2\langle \overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RS} \rangle.$$

Si nos points forment un parallélogramme, on a

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$

et

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR},$$

et le résultat suit.

Enfin, si on se donne toujours quatre points P, Q, R, S, on a

$$PR^2 - QR^2 =$$

$$PR^2 - (PQ^2 + PR^2 - 2\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \rangle) =$$

$$2\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \rangle - PQ^2$$

et de maniére analogue,

$$PS^2 - QS^2 = 2\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS} \rangle) - PQ^2.$$

Notre condition est donc équivalente à

$$\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \rangle = \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS} \rangle.$$

Et comme

$$\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS} \rangle = \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PR} \rangle =$$

$$\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS} \rangle - \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \rangle,$$

on obtient ce qu'on voulait.

5.2.4 Remarque

Si E est un espace vectoriel euclidien, on note parfois si $u, v \neq 0$,

$$(\widehat{u, v}) := arcos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Dans un espace affine euclidien, si $Q \neq P$ et $R \neq P$, on écrit alors

$$\widehat{QPR} := (\widehat{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}}).$$

La première formule ci-dessus se réécrit alors sous la forme plus familiére

$$QR^2 = PQ^2 + PR^2 - 2PR.PQ.cos(\widehat{QPR}).$$

5.2.5 Définition

Un triangle $\{P, Q, R\}$ est *isocéle* en P si $PQ = PR$. Il est *équilatéral* si

$$PQ = PR = QR.$$

Un *losange* est un parallélogramme

$$(P, Q, R, S)$$

tel que $PQ = PS$. Enfin, un *carré* est un parallélogramme qui est à la fois un rectangle et un losange.

5.2.6 Proposition

a) *Un triangle est isocéle en un sommet P si et seulement si la médiane issue de P, la hauteur issue de P et la médiatrice du cté opposé sont identiques. En fait, il suffit que deux de ces droites concident.*

b) *Un triangle est équilatéral si et seulement si son centre de gravité, son orthocentre et le point d'intersection des médiatrices concident. En fait, il suffit que deux de ces points concident.*

Démonstration : Soit donc

$$T := \{P, Q, R\}$$

un triangle et I le milieu de $\{Q, R\}$. On a

$$PQ^2 = IP^2 + IQ^2 - 2\langle\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IQ}\rangle$$

et

$$PR^2 = IP^2 + IR^2 - 2\langle\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IR}\rangle.$$

Comme

$$\overrightarrow{IR} = -\overrightarrow{IQ},$$

on voit que

$$PQ = PR \Leftrightarrow \langle\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IQ}\rangle = 0,$$

c'est à dire $(IP)\perp(QR)$. Cette derniére condition implique bien que les trois droites définies ci-dessus sont confondues. Et il suffit clairement que deux d'entre elles le soient.

Bien sr, un triangle est équilatéral si et seulement si il est isocéle en chaque sommet. Et on applique alors le résultat précédent.

5.2.7 Proposition

L'hyperplan médiateur d'un bipoint $\{P, Q\}$ est

$$\{M \in E, PM = QM\}.$$

En particulier, l'intersection des médiatrices d'un triangle $\{P, Q, R\}$ est l'unique point O tel que

$$OP = OQ = OR.$$

Démonstration : La seconde assertion est clairement une conséquence de la premiére. Pour démontrer celle-ci, on note H l'hyperplan médiateur et I le milieu de $\{P, Q\}$. Si $M \neq I$, on a $M \in H$ si et seulement si $(IM) \perp (PQ)$, ce qui signifie que le triangle $\{M, P, Q\}$ est isocéle en M et donc que $PM = QM$.

5.2.8 Proposition

*Le centre de gravité G, l'orthocentre H et l'intersection O des médiatrices d'un triangle sont alignés (*droite d'Euler*). En fait,*

$$G = \frac{2}{3}O + \frac{1}{3}H.$$

Démonstration : On note

$$T := \{P, Q, R\}$$

le triangle et on définit

$$M := 3G - 2O.$$

On a alors

$$\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.$$

Il suit que

$$\langle \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{QR} \rangle = \langle \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{QR} \rangle =$$

$$\langle \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} \rangle =$$

$$OR^2 - OQ^2 = 0.$$

On voit donc que $(PM) \perp (QR)$. Il suit que M est sur la hauteur issue de P. Par symétrie, on en déduit que M est l'orthocentre. On a donc $M = H$, c'est à dire

$$H = 3G - 2O$$

comme annoncé.

5.3 Sous espaces et sphéres

5.3.1 Définition

Si F est un sous-espace affine de E, la projection (resp. symétrie) sur F de direction $\vec{F}^\perp$ est la *projection orthogonale* sur F (resp. la *symétrie orthogonale* par rapport à F).

5.3.2 Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $P \in E$. Alors, il existe un unique $P' \in F$ tel que

$$d(P, F) = PP'.$$

C'est le projeté orthogonal de P sur F.

Démonstration : Si $P \in F$, c'est trivial. Soit donc $P \notin F$ et P' son projeté orthogonal sur F. Par définition, si $Q \in F$ avec $Q \neq P'$, alors $(PP')\perp(P'Q)$. Il suit que le triangle $\{P, P', Q\}$ est rectangle en P'. Le théoréme de Pythagore nous dit que

$$PQ^2 = PP'^2 + P'Q^2 > PP'^2$$

et donc que $PQ > PP'$.

5.3.3 Définition

Dans un espace métrique E, la *boule fermée* de rayon $R0$ et de centre $x \in E$ est l'ensemble

$$B^+(x, R) := \{y \in E, d(x, y) \leq R\}.$$

On définit de même la *boule ouverte* $B^-(x, R)$ et la *sphére* $S(x, R)$ en substituant à l'inégalité large, l'inégalité stricte ou l'égalité.

5.3.4 Définition

Les définitions ci-dessus s'appliquent en particulier au cas ou E est un espace affine euclidien. Dans le cas particulier o E est un plan affine euclidien, on dit *disque* ou *cercle* au lieu de boule ou sphére et on utilise plutt les lettres D et C à la place de B et S. On appelle *diamétre* toute droite passant par le centre.

5.3.5 Définition

On dit qu'un sous-espace affine F est *tangent* à S en P si

$$F \cap S = \{P\}.$$

De même, on dit que deux sphéres sont *tangentes* en P si leur intersection est réduite au point P..

5.3.6 Proposition

Soit

$$S := S(\Omega, R) \subset E,$$

F un sous-espace affine de E et

$$d := d(\Omega, F).$$

Alors,

$$S \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \leq R.$$

Dans ce cas, $S \cap F$ est une sphére de F dont le centre est le projeté orthogonal de Ω sur F et le rayon est

$$r := \sqrt{R^2 - d^2}.$$

En particulier, F est tangent à S si et seulement si $d = R$.

Démonstration : Soit Ω' le projeté orthogonal de Ω sur F. Si $Q \in F$, alors, par le théoréme de Pythagore, on a

$$\Omega\Omega'^2 + \Omega' Q^2 = \Omega Q^2.$$

On a donc $Q \in S$ si et seulement si $\Omega Q = R$, c'est à dire

$$d^2 + \Omega' Q^2 = R^2.$$

Ceci n'est possible que si $d \leq R$ et dans ce cas, on trouve que $Q \in S$ si et seulement si $\Omega' Q = \sqrt{R^2 - d^2}$.

5.3.7 Proposition

Si S est une sphére de centre Ω qui n'est pas réduite à un point et $P \in S$, alors il existe un hyperplan H et un seul tangent à S en P : c'est l'hyperplan perpendiculaire à (ΩP) passant par P. Il est aussi caractérisé par la propriété

$$d(\Omega, H) = R$$

ou R est le rayon de la sphére.

Démonstration : Effectivement, si H est un hyperplan tangent à S en P, alors P est le projeté orthogonal de Ω sur H. Réciproquement, si H est l'hyperplan perpendiculaire à (ΩP) passant par P, alors

$$d(\Omega, H) := \Omega P$$

est le rayon de S. Et on sait alors que $S \cap H = \{P\}$.

5.4 Cercles et droites

On se place dans un plan affine euclidien.

5.4.1 Proposition

i) Par les sommets d'un triangle, il passe un cercle et un seul. Son centre est l'intersection des médiatrices.

ii) Si P et Q sont deux points distincts du plan, il existe un unique cercle de diamétre (PQ) passant par P et Q : c'est le cercle

$$C := C(\Omega, R)$$

o Ω est le milieu de $\{P, Q\}$ et

$$R := \frac{PQ}{2}.$$

En fait $M \in C$ si et seulement si $M = P$, $M = Q$ ou $\{P, Q, M\}$ est un triangle rectangle en M.

Démonstration : On a vu que l'intersection des médiatrices d'un triangle $\{P, Q, R\}$ est l'unique point O tel que

$$OP = OQ = OR.$$

La premiére assertion en résulte.

Le second résultat est conséquence des deux remarques suivantes. Tout d'abord, on a

$$C \cap (PQ) = \{P, Q\}.$$

D'autre part, si $M \notin (PQ)$, on sait que le triangle $\{P, Q, M\}$ est rectangle en M si et seulement si les médiatrices se rencontrent en Ω. Grce à la premiére assertion, cela signifie que que $M \in C$.

5.4.2 Définition

On dit que ce cercle qui passe par les sommets d'un triangle est le cercle *circonscrit*.

5.4.3 Lemme

étant donnés deux points distincts Ω, Ω' et $d \in \mathbf{R}$, il existe un unique $H \in (\Omega\Omega')$ tel que

$$\Omega H^2 - \Omega' H^2 = d.$$

De plus, la droite D perpendiculaire à $(\Omega\Omega')$ passant par H a pour "équation"

$$\Omega P^2 - \Omega' P^2 = d.$$

Démonstration : On écrit

$$H := \lambda\Omega + \mu\Omega'$$

avec
$$\lambda + \mu = 1.$$
On a alors
$$\overrightarrow{\Omega H} = \mu \overrightarrow{\Omega \Omega'}$$
et
$$\overrightarrow{\Omega' H} = \lambda \overrightarrow{\Omega' \Omega}.$$
Notre condition devient donc
$$\mu^2 \Omega\Omega'^2 - \lambda^2 \Omega\Omega'^2 = d,$$
c'est à dire
$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{d}{\Omega\Omega'^2},$$
et comme
$$\lambda + \mu = 1,$$
on trouve
$$2\mu - 1 = \frac{d}{\Omega\Omega'^2},$$
équation qui a toujours une unique solution.

Un point $P \neq H$ est situé sur la droite passant par H et perpendiculaire à D si et seulement si $(PH) \perp (\Omega\Omega')$ et cette condition est équivalente à
$$\Omega P^2 - \Omega' P^2 = \Omega H^2 - \Omega' H^2 = d.$$

5.4.4 Proposition

Soient
$$C := C(\Omega, R)$$
et
$$C' := C(\Omega', R')$$
deux cercles de rayons non nuls et de centres distincts. Alors,

a) *si*
$$\Omega\Omega' > R + R'$$
ou
$$\Omega\Omega' < |R - R'|,$$
alors C et C' ne se rencontrent pas.

b) *si*
$$\Omega\Omega' = R + R'$$
ou
$$\Omega\Omega' = |R - R'|,$$
alors C et C' sont tangents en un point P. Les deux (droites) tangentes en ce point sont alors égales.

c) si
$$|R - R'| < \Omega\Omega' < R + R',$$
alors $C \cap C'$ contient exactement deux points et $(\Omega\Omega')$ est la médiatrice de ces deux points.

Démonstration : Débarrassons nous des secondes parties des deux derniéres assertions.

Si les deux cercles sont tangents en un point P, les tangentes en P sont égales : cela résulte du fait, comme on le voit ci-dessous, que $P \in (\Omega\Omega')$.

Aussi, si
$$C \cap C' = \{P, Q\},$$
alors
$$\Omega P = \Omega Q = R$$
et
$$\Omega' P = \Omega' Q = R'.$$
Il suit que Ω et Ω' sont tous deux sur la médiatrice de $\{P, Q\}$.

Soit H l'unique point de $(\Omega\Omega')$ tel que
$$\Omega H^2 - \Omega' H^2 = R^2 - R'^2$$
et D la perpendiculaire à $(\Omega\Omega')$ en H. On sait que $P \in D$ si et seulement si
$$\Omega P^2 - \Omega' P^2 = R^2 - R'^2.$$
On voit donc que $P \in C \cap D$ si et seulement si $\Omega P = R$ et $\Omega' P = R'$. Ceci signifie que
$$C \cap C' = C \cap D.$$
Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\Omega H \leq R$ si et seulement si
$$|R - R'| \leq \Omega\Omega' \leq R + R'$$
(et la formule analogue avec des inégalités strictes). On peut supposer RR'. La condition peut alors se réécrire
$$(\Omega\Omega' - (R - R'))(\Omega\Omega' - (R + R')) \leq 0,$$
c'est à dire
$$\Omega\Omega'^2 - 2R\Omega\Omega' + R^2 - R'^2 \leq 0.$$
On écrit alors comme dans le lemme
$$H := \lambda\Omega + \mu\Omega'$$
avec
$$\lambda + \mu = 1,$$
ce qui nous donne
$$(2\mu - 1)\Omega\Omega'^2 = R^2 - R'^2.$$

Comme RR', on a

$$R^2 - R'^2 + \Omega\Omega'^2 0$$

et donc μO, ce qui donne $\Omega H = \mu\Omega\Omega'$. Notre condition qui se réécrit alors

$$\Omega\Omega'^2 - 2R\Omega\Omega' + (2\mu - 1)\Omega\Omega'^2 \leq 0,$$

soit en simplifiant,

$$-2R + 2\Omega H \leq 0,$$

c'est à dire $\Omega H \leq R$.

5.4.5 Proposition

Soit

$$C := C(\Omega, R)$$

avec $R \neq 0$, P un point quelconque et

$$d := d(\Omega, P).$$

Si $d < R$, alors aucune tangente à C ne passe par P. Si $d = R$, il y en a une seule. Enfin, si $d > R$, il y en a exactement deux et leur médiatrice est (ΩP).

Démonstration : Si $d = R$, c'est à dire $P \in C$, on sait qu'il y a une unique tangente à C en P. On peut donc supposer que $P \notin C$. Soit $M \in C$. Alors, la droite (PM) est tangente au cercle si et seulement si le triangle $\{\Omega, M, P\}$ est rectangle en M. C'est à dire si et seulement si

$$R^2 + MP^2 = d^2,$$

ou encore si dR et

$$M \in C(P, \sqrt{d^2 - R^2}),$$

On conclut alors avec la proposition précédente.

5.5 Exercices

Exercice 111 *Montrer que l'application*

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$ *(dit canonique). Quelle est la norme associée. Généraliser à* $\mathbf{R}^n$.

Exercice 112 *On voit* $\mathbf{C}$ *comme un espace vectoriel sur* $\mathbf{R}$*. Montrer que l'application*

$$(z, w) \mapsto Re(z\bar{w})$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{C}$*. Quelle est la norme associée.*

Exercice 113 *On considére l'espace vectoriel* $\mathcal{C}([a, b])$ *des applications continues sur* $[a, b]$*. Montrer que l'application*

$$(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b])$*. Quelle est la norme associée.*

Exercice 114 *Soit* $\langle -, - \rangle$ *un produit scalaire sur un espace vectoriel* E*. Montrer que* u *et* v *sont orthogonaux si*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

et linéairement dépendants si et seulement si

$$|\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|.$$

Exercice 115 *Soit* E *un espace euclidien de dimension* n *muni d'un repére orthonormé. Soit* u *le vecteur de coordonnées*

$$(a_1, \ldots, a_n)$$

et

$$\varphi : E \to \mathbf{R}$$

la forme linéaire dont la matrice est

$$[a_1 \cdots a_n].$$

Montrer que $\langle u, v \rangle = \varphi(v)$*. En déduire que*

$$v \in \ker \varphi \Leftrightarrow u \perp v.$$

Exercice 116 *Soit E un espace euclidien de dimension 3 muni d'un repére orthonormé. On rappelle que le* produit vectoriel *$u \wedge u'$ des vecteurs u et u' de composantes respectives*

$$(a, b, c)$$

et

$$(a', b', c')$$

est le vecteur de composantes

$$(\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}).$$

Soit

$$\phi : E \to \mathbf{R}^2$$

l'application linéaire dont la matrice est

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}.$$

Montrer que

$$u \wedge u' \in \ker \phi$$

et que

$$v \in \ker \phi \Leftrightarrow v \perp u \text{ et } v \perp u'.$$

Exercice 117 *Montrer que u et u' sont linéairement indépendants si et seulement si $u \wedge u' \neq 0$. Montrer qu'alors $v \perp u$ et $v \perp u'$ si et seulement si v est un multiple de $u \wedge u'$.*

Exercice 118 *Démontrer les formules suivantes*

a) $(u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$

b) $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$

c) $(\lambda u) \wedge v = \lambda(u \wedge v) = u \wedge (\lambda v))$

d) $v \wedge u = -u \wedge v$

Exercice 119 *Montrer que*

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u$$

Exercice 120 *Montrer que*

$$\|u \wedge v\|^2 + \langle u, v\rangle = \|u\|^2\|v\|^2.$$

Dans tous les exercices qui suivent on travaille dans un espace euclidien de dimension 2 ou 3 muni éventuellement d'un repére orthonormé.

Exercice 121 *Soit $\{A, B, C\}$ un triangle et I le milieu de $\{B, C\}$. Montrer que le triangle $\{A, B, C\}$ est isocéle en A si et seulement si le triangle $\{A, B, I\}$ est rectangle en I.*

Exercice 122 *Montrer qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si les diagonales sont perpendiculaires et que c'est un rectangle si et seulement si les diagonales ont même longueur.*

Exercice 123 *Soit*

$$(P, Q, R, S)$$

un parallélogramme, D *la droite passant par* P *et paralléle à* (QS)*,* E *la droite passant par* Q *et paralléle à* (PR)*,* F *la droite passant par* R *et paralléle à* (QS) *et enfin* G *la droite passant par* S *et paralléle à* (PR)*. Soient*

$$P' = D \cap E,$$

$$Q' = E \cap F,$$

$$R' = F \cap G$$

et

$$S' = G \cap D.$$

Montrer que

$$(P', Q', R', S')$$

est un parallélogramme, que c'est un losange si et seulement si

$$(P, Q, R, S)$$

est un rectangle et réciproquement. Enfin, montrer que l'un est un carré si et seulement si l'autre est un carré.

Exercice 124 *Montrer que des droites d'équation*

$$ax + by + c = 0$$

et

$$a'x + b'y + c' = 0$$

sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$*.*

Exercice 125 *Soit* D *une droite dirigée par* $u(1, 2, 3)$*. Déterminer une équation du plan perpendiculaire à* D *passant par le point de coordonnées* $(2, 3, 5)$*.*

Exercice 126 *Soit* H *le plan passant par les points de coordonnées* $(1, -2, 1)$*,* $(0, 1, 2)$ *et* $(1, 3, 4)$*. Déterminer un vecteur directeur de la droite perpendiculaire à* H *passant par le point de coordonnées* $(5, 1, 3)$*.*

Exercice 127 *Parmi les plans d'équations*

$$4x + 2y - 4z + 5 = 0,$$

$$2x + y + 2z - 1 = 0,$$

$$3x - y - 2z - 5,$$

$$x + 9y - 3z + 2,$$

$$x - 3z + 2$$

et

$$2x - 6z - 7,$$

lesquels sont paralléles ou perpendiculaires ?

Exercice 128 *Soient D la droite d'équation*

$$ax + by + c = 0$$

et $P(\alpha, \beta)$. Montrer que

$$d(P, D) = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Généraliser en dimension supérieure (la droite devenant un hyperplan).

Exercice 129 *Soient D la droite d'équation*

$$x + y + 1 = 0$$

et $P(1, 1)$. Calculer $d(P, D)$.

Exercice 130 *Même question avec*

$$2x + 3y - 4 = 0$$

et $(2, 3)$.

Exercice 131 *Soient P un point et D la droite passant par M et dirigée par u. Montrer que*

$$d(P, D) = \frac{\|\overrightarrow{PM} \wedge u\|}{\|u\|}.$$

Exercice 132 *Quelle est la distance du point $P(1, 1, 1)$ à la droite passant par le point de coordonnées $(-1, 2, 3)$ et dirigée par le vecteur de composantes $(2, -1, 2)$?*

Exercice 133 *Soit D l'intersection des plans d'équations*

$$x + y + z = 2$$

et

$$2x - 3y + z = 3.$$

Quelle est la distance à D du point de coordonnées $(1, -1, 1)$?

Exercice 134 *Même question avec*

$$x + 2y - z + 3 = 0$$

et

$$x - y + 2z + 4 = 0$$

et (a, b, c).

Exercice 135 *On considére un rectangle passant par le point de coordonnées* $(7/3, 0)$, *ayant pour sommet le point de coordonnées* $(2, -3)$ *et dont un des cotés a pour équation*

$$2x - 3y + 5 = 0.$$

Déterminer des équations des autres cotés. Quelles sont les coordonnées du centre ?

Exercice 136 *On considére un triangle* $\{A, B, C\}$ *tel que* $A(2, -7)$, *la hauteur issue de* B *a pour équation*

$$3x + y + 11 = 0$$

et la médiane issue de C *a pour équation*

$$x + 2y + 7 = 0.$$

Déterminer des équations des cotés du triangle.

Exercice 137 *Soient* $A(2, 4)$, $B(-2, -4)$ *et* $C(7, -1)$. *Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle. En donner une équation. Déterminer aussi une équation de la droite d'Euler. Déterminer l'intersection de cette droite avec le cercle circonscrit.*

Exercice 138 *On considére les points* A, B *et* C *de coordonnées respectives* $(-3, 1)$, $(1, 5)$ *et* $(3, -3)$. *Déterminer des équations des médianes, des médiatrices et des hauteurs du triangle* $\{A, B, C\}$. *Déterminer leurs intersections respectives* G, O *et* H. *Vérifier que ces trois points sont alignés. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle* $\{A, B, C\}$. *Déterminer les symétriques de* H *par les symétries orthogonales par rapport aux cotés du triangles. Vérifier que ces trois points sont sur les cercle circonscrit. Même chose avec les symétriques par rapport aux milieux des cotés.*

Exercice 139 *On note* Ω *le centre du repére et* A, B *et* C *les points de coordonnées respectives* $(2\sqrt{3}, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ *et* $(0, 0, 1)$. *Déterminer une équation du plan passant par* A, B *et* C. *Calculer les coordonnées du projeté orthogonal* H *de* Ω *sur ce plan. Calculer la distance de* Ω *à ce plan. Montrer que la droite* (AB) *est perpendiculaire au plan passant par* Ω, C *et* H. *Montrer que* H *est l'orthocentre du triangle* $\{A, B, C\}$.

Exercice 140 *Soient*

$$\mathcal{C} := C(\Omega, R)$$

et

$$\mathcal{C}' := C(\Omega', R').$$

On suppose que

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{C} = \{P, Q\}$$

avec $P \neq Q$. *Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\Omega P \perp \Omega' P$
2. $\Omega Q \perp \Omega' Q$
3. $\Omega\Omega'^2 = R^2 + R'^2$

4. *les tangentes à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en P sont perpendiculaires*
5. *les tangentes à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en Q sont perpendiculaires.*

On suppose que les cercles ont pour équations respectives

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

et

$$x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0.$$

Montrer que les conditions ci-dessus sont équivalentes à

$$2(\alpha\alpha' + \beta\beta') = \gamma + \gamma'.$$

Exercice 141 *Soient*

$$\mathcal{C} := C(\Omega, R)$$

et

$$\mathcal{C}' := C(\Omega', R').$$

On suppose que $\mathcal{C}'$ est à l'intérieur $\mathcal{C}$. Soit Δ une tangente à $\mathcal{C}'$. Montrer que $\Delta \cap \mathcal{C}$ est constituée de deux points, que l'on note P et Q. Soit O le centre du cercle circonscrit à $\{\Omega, P, Q\}$. Montrer que $O\Omega$ ne dépend pas de Δ.

Bibliographie

[1] M. Berger, *Géométrie*, CEDIC/Fernand Nathan (1977).

[2] A. Bigard, *Géométrie. Cours et exercices corrigés pour le Capes et l'agrégation.* Masson, Paris (1998).

[3] J. Fraenkel, *Géométrie pour l'éléve professeur*, Hermann (1973).

[4] G. Pupion, *Exercices d'algébre avec solutions et cours résumé.* Presses Universitaires de France, Paris (1983).

[5] P. Tauvel, *Géométrie pour l'agrégation interne*, Masson (1997)

[6] C. Tisseron, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann (1983).