Géométrie algébrique et géométrie complexe

Claire Voisin
Institut de mathématiques de Jussieu, CNRS,UMR 7586

Table des matières

0 Introduction

La notion classique d'espace géométrique. Espace topologique = ensemble X + topologie (données ensemblistes sur X). On a automatiquement le faisceau de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ (faisceau d'anneaux).

(Rappel faisceaux....)

Variétés différentiables (resp. complexes) : espace topologique séparé + sous-faisceau des fonctions différentiables (resp. holomorphes).

Dans ces définitions, les points sont importants : la variété est vue comme ensemble de points.

Dans le cas différentiable, (ou topologique, ou holomorphe affine), on retrouve la variété comme le spectre maximal de l'algèbre des fonctions différentiables A_X :

On a pour chaque $x \in X$ une application d'évaluation

$$A_X \to \mathbb{R},$$

$$f \mapsto f(x).$$

C'est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres. Le noyau est donc un idéal maximal $\mathcal{M}_x$ de A_X.

Lemme 0.1 *Si X est un espace topologique compact (ou une variété différentiable compacte) séparé, X est de cette manière en bijection avec l'ensemble des idéaux maximaux de A_X.*

Espaces annelés. La notion qui émerge est celle d'espace annelé (resp. localement annelé) : C'est un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$. (resp. De plus le germe $\mathcal{A}_x$ en x doit être un anneau local.)

Morphismes d'espaces annelés. $(X, \mathcal{A}_X)$, et $(Y, \mathcal{A}_X)$ étant deux espaces annelés, les morphismes de $(X, \mathcal{A}_X)$ dans $(Y, \mathcal{A}_X)$ sont donnés par les applications continues entre $\phi : X \to Y$ entre les espaces topologiques sous-jacents, accompagnés d'un morphisme de faisceau d'anneaux ("pull-back")

$$\phi^* : \phi^{-1}\mathcal{A}_Y \to \mathcal{A}_X.$$

Dans le cas localement annelé, on demande que les morphismes de germes

$$\phi^* : \mathcal{A}_{Y,\phi(x)} \to \mathcal{A}_{X,x}$$

soit un morphisme d'anneaux locaux.

Le point de vue de la géométrie algébrique. Une variété algébrique n'est pas tout d'abord un ensemble de points.

Raison : Elle sera définie par des équations polynomiales (à coefficients dans k) dans A_k^n ou $\mathbb{P}_k^n$, où k est le corps de définition. Si k n'est pas algébriquement clos, il peut ne pas y avoir de points du tout, et pourtant la variété n'est pas en général l'ensemble vide, au sens où si on étend le corps k, on peut avoir des points.

Exemple : La variété d'équation $\sum_i x_i^2 = -1$ est une variété algébrique réelle très intéressante, même si elle n'a pas de points réels : son anneau de fonctions algébriques est $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]/ < \sum_i X_i^2 + 1 >$.

Par contre, si la variété n'est pas vide (comme variété algébrique), elle a des points sur des corps qui sont des extensions algébriques du corps de base, ou même sur des corps beaucoup plus gros (le *point générique*, par exemple). Tous ces points font partie du spectre (dans le cas affine) et se voient déjà sans étendre le corps de définition.

L'idée, dans le cas affine, est de partir de l'anneau A des fonctions algébriques, (une k-algèbre de type fini) et d'introduire tout son spectre (idéaux premiers). Ce spectre contrôle les k-points, mais aussi les $\overline{k}$-points, correspondant aux points fermés du spectre. Cela veut dire que l'on n'a pas d'évaluation des fonctions sur les points du spectre, même maximal. Ou plutôt l'évaluation en un idéal maximal $\mathcal{M}$ est à valeurs dans le corps résiduel $A/\mathcal{M}$, une extension algébrique de k.

Pourquoi ne passe-t-on pas tout de suite à la clôture algébrique du corps, où on a "tous" les points, au sens où les corps résiduels sont égaux au corps de définition, ce qui permet d'évaluer les fonctions ?

Il y a des quantités d'invariants attachés à une variété algébrique définie sur k. En général, ce sont naturellement des k-espaces vectoriels obtenus comme des groupes de cohomologie. Si on étend le corps de définition à un corps plus gros K, les nouveaux invariants seront les anciens tensorisés par K. On a alors perdu la k-structure.

Première partie
Schémas affines et projectifs, faisceaux cohérents

1 Schémas affines et projectifs

Le corps k est donné. C'est le corps de base. L'anneau fondamental est l'anneau $k[X_1, \ldots, X_n]$. Dans le cas de $\mathbb{P}_k^n$, on considérera $k[X_0, \ldots, X_n]$, et on le verra comme un anneau gradué par le degré. Ces anneaux sont des k-algèbres.

1.1 L'espace affine A_k^n

Spectre : on considère le spectre $A_n^k = Spec\, k[X_1, \ldots, X_n]$. Comme ensemble c'est l'ensemble des idéaux premiers de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Ce spectre possède la topologie suivante, dite de Zariski : Les fermés de $Spec\, k[X_1, \ldots, X_n]$ sont donnés par les idéaux $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$. Si I est un idéal, le fermé associé est

$$F_I = \{\mu \in Spec\, k[X_1, \ldots, X_n],\ I \subset \mu\}.$$

Exercice 1.1 *Vérifier que c'est une topologie.*

Noter que si $U_I := Spec\, k[X_1, \ldots, X_n] \setminus F_I$ est le complémentaire de F_I, on a $U_I = \cup_{f \in I} U_f$, où $U_f := \{\mu \in Spec\, k[X_1, \ldots, X_n],\ f \notin \mu\}$. Les ouverts U_f sont dits affines. Par ce qui précède ils forment une base d'ouverts de $Spec\, k[X_1, \ldots, X_n]$.

Remarque 1.2 *Deux idéaux différents peuvent définir des fermés égaux. Le contenu du "Nullstellensatz" précise la relation entre deux idéaux définissant le même fermé.*

Par contre, si on s'intéresse aux sous-schémas, c'est-à-dire aux fermés munis d'un faisceau structurel, (voir plus loin), ils sont exactement en bijection avec les idéaux.

Faisceau structurel $\mathcal{O}$. Soit $0 \neq f \in k[X_1, \ldots, X_n]$, définissant un ouvert $U_f = Spec\, k[X_1, \ldots, X_n]_f$ constitué des idéaux premiers ne contenant pas f. On pose alors $\mathcal{O}(U_f) = k[X_1, \ldots, X_n]_f$, le localisé en f de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Le faisceau structurel est le faisceau associé au préfaisceau $U_f \mapsto k[X_1, \ldots, X_n]_f$ défini seulement sur les U_f.

On a le résultat suivant, qui montre le préfaisceau ci-dessus était déjà un faisceau :

Proposition 1.3 *Si $U_f = U_{f_1} \cup \ldots \cup U_{f_k}$, alors l'ensemble des $(\sigma_i) \in k[X_1, \ldots, X_n]_{f_i}$, $\sigma_i = \sigma_j$ dans $k[X_1, \ldots, X_n]_{f_i f_j}$ est égal à $\mathcal{O}(U_f) = k[X_1, \ldots, X_n]_f$. En d'autres termes $\Gamma(U_f, \mathcal{O}_{U_f}) = \mathcal{O}(U_f)$.*

Démonstration. Dire que $U_{f_i} \subset U_f$ équivaut à dire que f divise f_i^l pour un certain l et il en résulte que $k[X_1, \ldots, X_n]_{f, f_i} = k[X_1, \ldots, X_n]_{f_i}$.

En effet, cela signifie que tout idéal premier contenant f contient f_i, et donc que tout idéal premier de $k[X_1, \ldots, X_n]/ < f >$ contient l'image de $\overline{f}_i$ dans $k[X_1, \ldots, X_n]/ < f >$. Donc

$$\overline{f}_i \in \cap_\mu \mu,$$

où l'intersection est prise sur tous les idéaux premiers de $k[X_1, \ldots, X_n]/ < f >$. Il est facile de voir que $\overline{f}_i$ est alors nilpotent.

Le fait que $U_f = U_{f_1} \cup \ldots \cup U_{f_k}$ équivaut à dire que l'idéal engendré par les f_i contient 1 dans $k[X_1, \ldots, X_n]_f$. En effet, dans le cas contraire, cet idéal est contenu dans un idéal premier non trivial, ce qui donne un point de U_f dans l'intersection des complémentaires des U_{f_i}.

On a donc une relation $f^m = \sum_i g_i f_i$. De même, pour tout entiers $l_i \geq 0$, on a une relation $f^m = \sum_i g_i f_i^{l_i}$, où m et les $g_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$ dépendent des l_i.

Soit maintenant $(\sigma_i) \in k[X_1, \ldots, X_n]_{f_i}$, $\sigma_i = \sigma_j$ dans $k[X_1, \ldots, X_n]_{f f_i f_j} = k[X_1, \ldots, X_n]_{f_i f_j}$. Alors il existe l_i tels que $f_i^{l_i} \sigma_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$.

On a alors $\sum_i g_i f_i^{l_i} \sigma_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$.

Mais d'autre part, on a $\sigma_i = \sigma_j$ dans $k[X_1, \ldots, X_n]_{f_i f_j}$. Cela entraîne que $f_i^{l_i} \sigma_j \in k[X_1, \ldots, X_n]$ et $f_i^{l_i} \sigma_i = f_i^{l_i} \sigma_j$ dans $k[X_1, \ldots, X_n]$. On a donc pour chaque j :

$$\sum_i g_i f_i^{l_i} \sigma_i = \sum_i (g_i f_i^{l_i}) \sigma_j = f^m \sigma_j,$$

ce qui montre que $\frac{\sum_i g_i f_i^{l_i} \sigma_i}{f^m}$ est un élément de $k[X_1, \ldots, X_n]_f$ qui se restreint à σ_j sur U_j. ∎

Les schémas affines sont déterminés par leur anneau de fonctions. Dans le cas de l'espace affine, cela se résume dans l'énoncé suivant, qui n'est rien d'autre que la proposition précédente appliquée à $f = 1$:

Proposition 1.4 *On a* $\Gamma(A^n_k, \mathcal{O}) = k[X_1, \ldots, X_n]$.

Germe. Soit $\mu \in Spec\, k[X_1, \ldots, X_n]$. Par définition, le germe $\mathcal{O}_{A^n_k,x}$ est le localisé $k[X_1, \ldots, X_n]_\mu$ relativement à la partie multiplicative $S_\mu := k[X_1, \ldots, X_n] \setminus \mu$ (c'est multiplicatif car μ est premier). En effet, rappelons que le germe $\mathcal{F}_x$ d'un faisceau $\mathcal{F}$ sur un espace topologique X en un point x est défini comme

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U, x \in U} \mathcal{F}(U).$$

Dans notre cas, on peut prendre comme base d'ouverts contenant le point du spectre correspondant à μ les ouverts affines $U_f := Spec\, k[X_1, \ldots, X_n]_f$, pour $f \notin \mu$. Mais la limite directe des $k[X_1, \ldots, X_n]_f$ pour $f \notin \mu$ est précisément $k[X_1, \ldots, X_n]_\mu$.

C'est bien un anneau local d'idéal maximal égal à $\mu k[X_1, \ldots, X_n]_\mu$, ce qui montre que notre espace annelé $(Spec\, k[X_1, \ldots, X_n], \mathcal{O})$ est localement annelé.

Corps résiduel. Soit $\mu \in A^n_k$. Le corps résiduel de μ est le corps

$$k[X_1, \ldots, X_n]_\mu / \mu k[X_1, \ldots, X_n]_\mu.$$

C'est un corps de fractions (c'est le corps de fonctions rationnelles sur l'ensemble algébrique irréductible défini par μ, voir plus loin).

Lorsque μ est maximal, le corps résiduel est égal à $k[X_1, \ldots, X_n]/\mu$. Ce corps est une algèbre de type fini sur k et donc est une extension algébrique de k ; on peut montrer ce résultat comme une conséquence du théorème de normalisation d'Emmy Noether 1.32, et du fait que l'anneau $k[\theta_1, \ldots, \theta_r]$ est intégralement gros.

K-points. Si K est un corps contenant k, les K-points de A^n_k sont exactement les morphismes de k-algèbres

$$k[X_1, \ldots, X_n] \to K.$$

C'est clairement en bijection avec K^n. Ces K-points sont aussi les morphismes de k-schémas $Spec\, K \to Spec\, k[X_1, \ldots, X_n]$.

(NB. On n'a pas encore dit ce qu'est un schéma !!!, voir plus loin.)

Les K-points d'un fermé X de A^n_k défini par un idéal I sont les morphismes de k-algèbres

$$k[X_1, \ldots, X_n]/I \to K.$$

Ils sont notés $X(K)$.

Cette description des K-points résume assez bien la situation : algébriquement, tout est dans l'anneau $k[X_1, \ldots, X_n]$; $k[X_1, \ldots, X_n]$ est l'anneau des fonctions polynomiales sur k^n. Géométriquement, on retrouve k^n comme l'ensemble des k-points de A^n_k. A ce stade, la situation est proche de la situation topologique, car les fonctions (polynômes) sont bien des fonctions sur k^n à valeurs dans k. Quand on passe aux K-points, ce n'est plus le cas, et on constate de plus qu'on a affaire à un nouvel ensemble de points.

Points fermés. Soit $\mu \in Spec\, k[X_1, \ldots, X_n]$. C'est un point d'un espace topologique. Ce point est fermé s'il est égal à sa clôture de Zariski $\overline{\mu}$. Cette clôture est l'intersection des fermés contenant μ. Or le plus petit fermé contenant μ est

$$\{\nu \in Spec\, k[X_1, \ldots, X_n],\, \mu \subset \nu\}.$$

Donc on a prouvé que le point μ est fermé dans le spectre si et seulement si l'idéal μ est maximal.

Point générique. L'idéal 0 de A^n_k est premier car $k[X_1, \ldots, X_n]$ est intègre. On a donc un point particulier de A^n_k, appelé le point générique. Son corps résiduel est le corps de fractions $k(X_1, \ldots, X_n)$. Ce point est générique car aucune fonction $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ne s'annule dessus, de sorte que sa clôture de Zariski est A^n_k.

1.2 L'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$

Ici il y a deux présentations possibles.

1) *Via les spectres gradués* : On part de l'anneau gradué $k[X_0, \ldots, X_n]$, et on considère

$$\mathbb{P}^n_k := Proj\, k[X_0, \ldots, X_n],$$

$$= \{\mu \subset k[X_0, \ldots, X_n],\, \mu \text{ } ideal\ premier,\ gradue,\ \mu \neq < X_0, \ldots, X_n >\}.$$

La topologie est la topologie de Zariski : Il suffit ici de prendre les idéaux I gradués de $k[X_0, \ldots, X_n]$, et on a alors les fermés associés :

$$F_I = \{\mu \in Proj\, k[X_0, \ldots, X_n],\, I \subset \mu\}.$$

Pour la structure d'espace annelé, on fait la chose suivante : Par définition, pour tout $\mu \in Proj\, k[X_0, \ldots, X_n]$, il existe un $i \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $X_i \notin \mu$. Alors μ appartient à l'ouvert de Zariski U_i défini par X_i :

$$U_i := \{\mu \in Proj\, k[X_0, \ldots, X_n],\, X_i \notin \mu\}.$$

On pose $\mathcal{O}_{U_i} = k[X_0/X_i, \ldots, X_n/X_i]$, et plus généralement, la structure d'espace annelé sur U_i est donnée en observant que comme espace topologique,

$$U_i = Spec\, k[X_0/X_i, \ldots, X_n/X_i]$$

(vérifier).

Pour construire une structure d'espace annelé globale, on utilise l'isomorphisme $k[X_0/X_i, \ldots, X_n/X_i] \cong k[X_0/X_j, \ldots, X_n/X_j]$ donné sur les coordonnées par la multiplication par X_i/X_j. La fonction X_i/X_j est "inversible" sur l'ouvert $U_i \cap U_j$ qui est constitué des idéaux premiers ne contenant ni X_i ni X_j. Ici inversible veut dire que X_i/X_j est inversible dans l'anneau $\mathcal{O}_\mu$ en chaque point μ.

Cet isomorphisme correspond à l'identification naturelle

$$k[X_0/X_i, \dots, X_n/X_i]_{X_j} \cong k[X_0/X_j, \dots, X_n/X_j]_{X_i}.$$

Le terme de gauche est l'anneau de fonctions sur $U_i \cap U_j$ vu comme un ouvert de U_i, et le terme de droite l'anneau de fonctions sur $U_i \cap U_j$ vu comme un ouvert de U_j. A l'aide de ces identifications, on obtient une structure globale d'espace annelé.

Point de vue schématique. On n'est pas forcé d'utiliser la notion de "Proj" pour définir $\mathbb{P}^n_k$. Comme on le verra plus loin, cette notion est surtout utile pour voir $\mathbb{P}^n_k$ comme un schéma muni d'un faisceau inversible ample.

On définit $\mathbb{P}^n_k$ comme la réunion de $n+1$ espaces affines

$$U_i = Spec\, k[X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n].$$

Les recollements $U_i \cap U_j$ sont donnés par l'identification

$$k[X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n]_{X_j} \cong k[X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_n]_{X_i}$$

envoyant X_k, $k \neq i$ sur $X_i X_k / X_j$. Cet isomorphisme induit comme ci-dessus un isomorphisme d'espaces annelés

$$(Spec\, U_i)_j \cong (Spec\, U_j)_i,$$

où le terme de gauche (resp. de droite) est l'ouvert de U_i défini par X_j (resp. l'ouvert de U_j défini par X_i). Ceci fournit les recollements souhaités en posant $U_i \cap U_j = (Spec\, U_i)_j \subset U_i = (Spec\, U_j)_i \subset U_j$.

La grande différence entre l'espace affine (plus généralement les schémas affines) et l'espace projectif (plus généralement les schémas projectifs) réside dans le fait que l'espace affine est déterminé par (et détermine) un anneau, qui est l'espace des sections globales de $\mathcal{O}$ (cf Proposition 1.4). Ceci n'est pas du tout vrai pour l'espace projectif. En fait on a :

Proposition 1.5 $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}) = k$.

Démonstration. On utilise la proposition 1.4, qui dit que les sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$ sur U_i s'identifient à $k[X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n]$. Sur $U_i \cap U_j$, les sections globales doivent être des couples constitués d'un polynôme P_i en X_l, $l \neq i$ et d'un polynôme P_j en X_l, $l \neq j$, satisfaisant la condition que $P_j = P_i(X_i X_l / X_j)$. Il faut vérifier que ces polynômes sont constants.

■

k-Points de $\mathbb{P}^n_k$.

Lemme 1.6 *Les k-points de $\mathbb{P}^n_k$ s'identifient aux droites de k^{n+1}.*

Démonstration. On voit ceci de la manière suivante : un k-point de $\mathbb{P}^n_k$ est un morphisme de k-schémas $Spec\, k \to \mathbb{P}^n_k$. L'image d'un tel morphisme est contenu dans un ouvert affine standard U_i où $X_i \neq 0$, (car le *Proj* ne contient pas l'idéal

$< X_0, \ldots, X_n >$) et est alors un k-point de U_i. Or U_i est isomorphe à A_k^n. Un k-point de U_i est donc un élément de k^n ; voyons k^n comme l'hyperplan affine de k^{n+1} défini par $x_i = 1$. Alors cet ensemble paramètre aussi des droites de k^{n+1}, par $u \mapsto < u >$ (précisément, l'ensemble des droites qu'on obtient ainsi est l'ensemble des droites non contenues dans l'hyperplan $\{x_i = 0\}$ et donc admettant un vecteur directeur satisfaisant $x_i = 1$). Ainsi les k-points de chaque U_i paramètrent des droites de k^{n+1} ; il reste à vérifier que sur les k-points de $U_i \cap U_j$, les identifications avec des droites de k^{n+1} via U_i et via U_j coïncident. ∎

1.3 Schémas quasi-projectifs

1.3.1 Schémas affines sur un corps

On peut définir plus généralement le spectre d'une k-algèbre de type fini A de la même façon qu'on a défini A_k^n. Les objets qu'on obtient sont les *k-schémas affines de type fini.* On pose

$$X := Spec\, A,$$

l'ensemble des idéaux premiers de A, qu'on munit de la topologie de Zariski. Une base d'ouverts est constitué des *ouverts affines* $X_f := Spec\, A_f \subset Spec\, A$. En effet, A_f est également de type fini sur k. La structure d'espace annelé est donnée comme précédemment en associant l'anneau A_f à l'ouvert X_f. Ceci définit un préfaisceau d'anneaux, et le faisceau structurel $\mathcal{O}_X$ est le faisceau associé. La proposition 1.4 reste vraie, avec essentiellement la même démonstration (rendue un peu plus subtile du fait que l'anneau A n'est plus supposé intègre) :

Proposition 1.7 *Pour X_f un ouvert affine de X, on a $\Gamma(U_f, \mathcal{O}_{U_f}) = A_f$.*

Les schémas affines sont en fait les sous-schémas fermés de A_k^n pour un n adéquat. Ici les sous-schémas fermés sont les fermés $Y \subset A_k^n$ (pour la topologie de Zariski) définis par un idéal $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$, avec faisceau structurel défini de la façon suivante : Pour tout ouvert U_f de A_k^n, induisant $Y_f := Y \cap U_f$, on pose $\mathcal{O}_{Y_f} = \mathcal{O}_{U_f}/I\mathcal{O}_{U_f}$.

La raison pour laquelle on peut réaliser un k-schéma affine de type fini comme sous-schéma d'un A_k^n est le fait que toute algèbre de type fini A est un quotient

$$A = k[X_1, \ldots, X_n]/I.$$

Le spectre de A s'identifie alors au fermé défini par I dans A_k^n car un idéal premier de A est la même chose qu'un idéal premier de $k[X_1, \ldots, X_n]$ contenant I. D'autre part, on a l'isomorphisme

$$A_f \cong k[X_1, \ldots, X_n]_f / Ik[X_1, \ldots, X_n]_f,$$

qui montre que la structure d'espace annelé sur $Spec\, A$ est bien la structure induite de sous-schéma.

Le Nullstellensatz. Chaque idéal I de $k[X_1, \ldots, X_n]$ définit deux objets : un sous-schéma de A_k^n et un fermé de A_k^n. La donnée du sous-schéma est équivalente à celle de l'idéal, à cause de la proposition 1.7 appliqué à $f = 1$.

Par contre, si I est un idéal, et p est un entier, I^p et I définissent le même fermé de A_k^n. Plus généralement, si f est telle que $f^p \in I$, pour un entier $p > 0$, il est clair que f appartient à tout idéal premier μ contenant I.

Définition 1.8 *L'ensemble des f satisfaisant la condition précédente est appelé le radical de I, et noté $\sqrt{I}$.*

Le théorème des zéros de Hilbert (ou Nullstellensatz) s'énonce de la manière suivante :

Théorème 1.9 *Soit $Y \subset A_k^n$ un fermé défini par un idéal I. Alors les éléments $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ s'annulant sur les points fermés de Y, c'est-à-dire tels que $f \in \mu$, $\forall \mu \in Y$ point fermé, est égal à $\sqrt{I}$.*

Rappelons que les points fermés de Y sont les éléments du spectre maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]/I$.

On obtient une version encore plus géométrique lorsque k est algébriquement clos. En effet, dans ce cas, comme on l'a vu plus haut, les idéaux maximaux de Y sont en fait les k-points de Y (en général, ce sont les k'-points, où k' est une extension algébrique de k).

Corollaire 1.10 *Si k est algébriquement clos, les éléments de $k[X_1, \ldots, X_n]$ s'annulant sur les k-points de Y sont les éléments de $\sqrt{I}$.*

Démonstration du théorème 1.9. On considère l'algèbre de type fini $A = k[X_1, \ldots, X_n]/I$. On veut montrer que l'intersection de ses idéaux maximaux est constituée d'éléments nilpotents. Supposons que $f \in A$ n'est pas nilpotent. Considérons $S = \{1, f, \ldots, f^p, \ldots\}$. S ne contient pas 0, et le localisé $A_S = A_f$ est donc non nul. Il existe alors un idéal maximal $\mathcal{M}$ de A_S, différent de A_S. La trace de $\mathcal{M}$ sur A est alors un idéal maximal de A. En effet, notons que A_S est de type fini sur k, et donc le corps $A_S/\mathcal{M}$ est nécessairement une extension algébrique de k, puisque c'est une k-algèbre de type fini. La sous-algèbre

$$A/(\mathcal{M} \cap A) \subset A_S/\mathcal{M}$$

est donc aussi un corps, et $\mathcal{M} \cap A$ est bien maximal. Or $f \notin \mathcal{M} \cap A$ puisque f est inversible dans A_S et $\mathcal{M} \neq A_S$. Donc f n'est pas dans l'intersection des idéaux maximaux. ■

Finalement, qu'est-ce qu'un k-schéma de type fini ? c'est un espace annelé localement isomorphe à un k-schéma affine de type fini et qui est couvert par un nombre fini d'ouverts affines.

Exemple type : $\mathbb{P}_k^n$.

Autre exemple non séparé : Prendre deux copies de $A_k^1 = Spec\, k[X]$ et les recoller par l'isomorphisme Id de l'ouvert $A_k^1 \setminus \{0\}$ où $X \neq 0$. Grâce à la propriété noethérienne des anneaux de polynômes, on a :

Lemme 1.11 *Tout ouvert de Zariski dans un k-schéma de type fini est encore de type fini.*

Démonstration. Il suffit de considérer un ouvert de Zariski $U \subset Spec\,A$ où A est une k-algèbre de type fini. Soit J un idéal de A tel que

$$U = \{\mu \in Spec\,A,\ J \not\subset \mu\}.$$

Comme A est noethérienne, J admet un nombre fini de générateurs f_i, $1 \leq i \leq n$, et on a $U = \cup_1^n U_{f_i}$, où $U_{f_i} = Spec\,A_{f_i}$ est bien affine de type fini.

■

On introduira plus loin la *propriété de séparation*, qui sera automatiquement satisfaite pour les schémas quasi-projectifs, mais n'est pas automatique pour des k-schémas abstraits.)

Morphismes. Les morphismes de k-schémas sont les morphismes d'espaces localement annelés sous-jacents, tels que les morphismes d'anneaux correspondants soient des morphismes de k-algèbres.

Remarque 1.12 Dans la définition de morphismes d'espaces localement annelés $f : (X, A_X) \to (Y, A_Y)$, on demande que $f : X \to Y$ soit continue, que $f^* : f^{-1}A_Y \to A_X$ soit un morphisme de pull-back associé, et que sur les germes :

$$f^* : A_{Y,f(x)} \to A_{X,x}$$

soit un *morphisme d'anneaux locaux*, c'est-à-dire que

$$(f^*)^{-1}(M_x) = M_y.$$

Exemple 1.13 Si k' est un corps contenant k, on peut voir $Spec\,k'$ comme un k-schéma, pas forcément de type fini (il y a un seul point, l'anneau local en ce point est k' qui est bien une k-algèbre. Si X est un k-schéma, $Mor_k(Spec\,k', X)$ s'identifie aux k'-points X.

Proposition 1.14 *Les morphismes de k-schémas affines de type fini s'identifient de façon contravariante aux morphismes de k-algèbres de type fini.*

Démonstration. En effet, si $\phi : X = Spec\,A \to Y = Spec\,B$ est un morphisme de k-schémas affines de type fini, on a un morphisme $\phi^* : \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Par la proposition 1.7, on obtient donc $\phi^* : B \to A$. Inversement, un morphisme $\psi : B \to A$ de k-algèbres fournit une application continue $\phi : Spec\,A \to Spec\,B$, $\mu \mapsto \psi^{-1}(\mu)$, et des morphismes localisés

$$\psi_f : B_f \to A_{\psi(f)}$$

qui fournissent le morphisme voulu d'espaces annelés.

Il faut utiliser le fait que ϕ est un morphisme d'espace localement annelés pour montrer que ces deux flèches sont inverses l'une de l'autre. ■

1.3.2 Schémas projectifs

On s'intéressera particulièrement aux schémas projectifs, c'est-à-dire aux k-schémas de type fini qui peuvent se réaliser comme des sous-schémas fermés d'un $\mathbb{P}^n_k$, pour un n adéquat. Noter que si $Y \subset \mathbb{P}^n_k$ est un sous-schéma projectif, il existe d'autres réalisations de Y comme sous-schéma d'un espace projectif.

Autre description : via les "Proj". Les objets qu'on obtient sont alors spécifiquement plongés. Un sous-schéma fermé Y de $\mathbb{P}^n_k$ est caractérisé par son idéal gradué $I \subset k[X_0, \ldots, X_n]$, $I_0 = 0$. Alors $Y = Proj\, k[X_0, \ldots, X_n]/I$, c'est-à-dire que Y est l'ensemble des idéaux premiers homogènes de $k[X_0, \ldots, X_n]/I$ qui ne contiennent pas $< X_0, \ldots, X_n >$, muni de la topologie de Zariski. Le faisceau structurel est décrit sur les ouverts $Y_i := Y \cap U_i$ comme dans le cas affine. Noter que I induit un idéal

$$I_i \subset k[X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_n],$$

où l'on voit $k[X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_n]$ comme un quotient de $k[X_0, \ldots, X_n]$ obtenu en faisant $X_i = 1$ (déshomogénéisation). Alors $Y_i = Spec\, k[X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_n]/I_i$ comme espace annelé, et les règles de recollement pour le faisceau structurel le long de $Y_i \cap Y_j$ sont les mêmes que pour l'espace projectif.

On verra plus loin comment interpréter les morceaux gradués de l'algèbre

$$k[X_0, \ldots, X_n]/I$$

comme des espaces de sections de faisceaux adéquats sur Y.

1.3.3 Schémas quasi-projectifs, opérations

Les schémas quasi-projectifs sont les sous-schémas localement fermés d'un espace projectif. En d'autres termes, ce sont des ouverts de Zariski dans des schémas projectifs.

Exemple 1.15 *(Un schéma qui est quasi-projectif mais n'est ni affine ni projectif).* On peut considérer $\mathbb{P}^n_k \setminus \{x\}$, où x est un k-point de $\mathbb{P}^n_k$. Comme $\{x\}$ est fermé, c'est un ouvert de $\mathbb{P}^n_k$. Ce n'est pas un schéma affine dès que $n > 1$, car on a :

Lemme 1.16 *Si $n > 1$, $H^0(\mathbb{P}^n_k \setminus \{x\}, \mathcal{O}) = k$.*

En effet, on a déjà vu que la réunion U de deux ouverts affines standard U_i et U_j de $\mathbb{P}^n_k$ satisfait $H^0(U, \mathcal{O}) = k$. (Voir Démonstration du lemme 1.5). Si $n > 1$ cette réunion ne remplit pas $\mathbb{P}^n_k$ car il existe un point x qui n'est pas dans U, c'est-à-dire satisfait les équations $X_i = X_j = 0$. Pour cet x on a alors $H^0(\mathbb{P}^n_k \setminus \{x\}, \mathcal{O}) = k$. Le cas général s'en déduit par un argument d'homogénéité (voir Exercice suivant).

Enfin il n'est pas projectif, car sinon l'inclusion

$$\mathbb{P}^n_k \setminus \{x\} \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$$

serait fermée (voir Corollaire 1.38.) ■

Exercice 1.17 *Soient x, y deux k-points fermés de $\mathbb{P}^n_k$. Alors il existe un automorphisme (de schéma) de $\mathbb{P}^n_k$ envoyant x sur y.*

Produit. On veut définir des produits dans la catégorie des k-schémas. Dans le cas affine, le produit $Spec\,A \times_k Spec\,B$ est défini comme $Spec\,(A \otimes_k B)$. En particulier c'est encore un schéma affine.

Ce produit satisfait (justifiant a posteriori la terminologie)

Lemme 1.18 *Pour tout corps K contenant k, $X \times_k Y(K) = X(K) \times Y(K)$.*

En effet, on a par définition

$$X(K) = Hom_{k-alg}(A, K),\ Y(K) = Hom_{k-alg}(B, K)$$

$$X \times_k Y(K) = Hom_{k-alg}(A \otimes_k B, K).$$

L'énoncé est donc équivalent à

$$Hom_{k-alg}(A \otimes_k B, K) = Hom_{k-alg}(A, K) \times Hom_{k-alg}(B, K).$$

Or on a des flèches évidentes dans les deux sens, l'une par restriction à $A \otimes 1$ et $1 \otimes B$, l'autre qui à (ϕ, ψ) associe $\phi \otimes \psi$. ■

Remarque 1.19 Il est clair d'après la démonstration qu'on pourrait ici remplacer les K-points par les morphismes de k-schémas de Z dans X, Y, $X \times_k Y$ pour n'importe quel Z.

Remarque 1.20 (Sur la topologie de Zariski) La topologie de Zariski sur $X \times_k Y$ n'est pas la topologie produit. La topologie de Zariski est extrêmement grossière (les ouverts sont beaucoup trop gros). La topologie de Zariski sur le produit est plus fine que la topologie produit : les ouverts de la forme $U \times V$ ne forment pas une base d'ouverts car leurs complémentaires sont des unions de la forme $X \times F \cup F' \times Y$, et il existe des fermés de $X \times_k X$ qui ne sont pas contenus dans des fermés de ce type. (Faire un exemple avec $A_k^2 = A_k^1 \times_k A_k^1$ et le fermé défini par $X_1 - X_2$ dans A_k^2.)

Une fois qu'on a les produits de schémas affines on peut faire des produits de schémas par recollements des produits d'ouverts affines. Le produit de deux k-schémas affines est affine. Le produit d'un schéma affine et d'un schéma projectif n'est en général ni affine ni projectif, mais on a les résultats suivants.

Proposition 1.21 *Le produit de deux k-schémas projectifs est projectif.*

Démonstration. Ici il faut utiliser le plongement de Segre

$$\mathbb{P}_k^n \times_k \mathbb{P}_k^m \to \mathbb{P}_k^{(m+1)(n+1)-1}.$$

Ce morphisme est induit par le morphisme d'algèbres de k-algèbres graduées

$$k[X_{ij}]_{0 \le i \le n, 0 \le j \le m} \to k[X_i] \otimes_k k[X_j],$$

envoyant X_{ij} sur $X_i X_j$. Il faut aller au chapitre suivant pour voir comment cela fournit un plongement fermé. Il en résulte que pour tous schémas projectifs $X \subset \mathbb{P}_k^n$, $Y \subset \mathbb{P}_k^m$, on a un plongement fermé de $X \times_k Y$ dans $\mathbb{P}_k^{(m+1)(n+1)-1}$. ■

Proposition 1.22 *Le produit de deux k-schémas quasi-projectifs est quasi-projectif.*

Démonstration Comme X est ouvert dans un schéma projectif X' et Y est ouvert dans un schéma projectif Y', on trouve que $X \times_k Y$ est ouvert dans $X' \times_k Y'$. Or ce dernier est projectif par la Proposition précédente. ■

Extension des scalaires. Soit X un k-schéma, et soit k' un corps contenant k. Alors $X_k \times_k Spec\, k'$ peut être vu comme un k'-schéma, vu que par construction son faisceau structurel est un faisceau de k'-algèbres. Ce k'-schéma est noté $X_{k'}$.

Exercice 1.23 *Si $X = A^n_k$, alors $X_{k'} = A^n_{k'}$. Si $X = \mathbb{P}^n_k$, alors $X_{k'} = \mathbb{P}^n_{k'}$.*

Propriété de séparation. Les k-schémas quasi-projectifs possèdent *la propriété de séparation*, qui dit que la diagonale de $X \times_k X$ (l'image du morphisme diagonal) est fermée dans $X \times_k X$. En général si on veut travailler avec des schémas plus généraux, on demande que cette propriété soit satisfaite. C'est l'analogue de la propriété Hausdorf pour les espaces topologiques. Comme $X \subset \mathbb{P}^n_k$, et que la diagonale de X n'est rien d'autre que l'intersection de la diagonale de $\mathbb{P}^n_k$ avec $X \times_k X$, il suffit de voir que la diagonale de $\mathbb{P}^n_k$ est fermée. Or elle est définie dans $\mathbb{P}^n_k \times_k \mathbb{P}^n_k$ par l'idéal (homogène en les deux groupes de variables) engendré par les $X_iY_j - X_jY_i$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$.

Produits fibrés. Si $\phi : X \to Z$ et $\psi : Y \to Z$ sont des morphismes de k-schémas, on définit le produit fibré $X \times_Z Y$ comme le sous k-schéma $(\phi, \psi)^{-1}(\Delta_Z)$ de $X \times_k Y$. Ici $\Delta_Z \subset Z \times Z$ est la diagonale de Z. On vient de voir que c'est fermé si Z est quasi-projectif. En général c'est fermé par définition si Z est séparé.

Remarque 1.24 (Finale sur cette section) On s'est restreint ici aux schémas de type fini sur un corps. C'est une grande simplification technique du point de vue de l'algèbre commutative, car cela va permettre de se restreindre aux k-algèbres de type fini. C'est aussi raisonnable du point de vue géométrique.

Cependant, c'est aussi beaucoup trop limitatif à certains égards : La propriété *de type fini* est trop restrictive : on a vu par exemple l'utilité de l'extension des scalaires $X_k \mapsto X_K$ qui fait intervenir le k-schéma $Spec\, K \to Spec\, k$. Ce dernier n'est pas de type fini sur k, sauf si K est algébrique sur k. Mais il est souvent utile de faire intervenir des corps qui ne sont pas des extensions finies de k. Par exemple, le corps de définition du point générique de X, qui est le corps de fonctions de X !

Un autre exemple où la propriété "de type fini" n'est pas satisfaite, est donné par les complétés formels (cf section 3.3) qui sont très utiles pour différentes raisons (par exemple, l'absence d'un théorème des fonctions implicites en géométrie algébrique).

De plus, beaucoup de constructions pourraient se faire aussi avec un anneau de base arbitraire, et en particulier sur l'anneau $\mathbb{Z}$. Même du point de vue géométrique, les variétés définies sur un anneau de base qui est un anneau A de fonctions sur k peuvent être vues comme des variétés munies d'un morphisme dans $Spec\, A$ et donc en quelque sorte comme des familles de variétés. Si on remplace A par son corps de fonctions, on obtient la fibre générique, et si on remplace A par un de ses corps résiduels, on trouve une fibre spéciale. Donc c'est encore plein de sens géométrique.

1.4 Premières propriétés des schémas quasi-projectifs

Irréductibilité.

Définition 1.25 *Un k-schéma quasi-projectif X est irréductible si $X = X_1 \cup X_2$, avec X_i fermés dans X, entraîne $X = X_1$ ou $X = X_2$.*

Exemple 1.26 Si k' est une extension algébrique galoisienne de k, $Spec\, k'$ est irréductible, étant réduit à un seul point. Pourtant, après extension des scalaires, c'est-à-dire, en prenant le produit avec la clôture algébrique $Spec\, \overline{k}$ de k, le nouveau schéma possède $[k' : k]$ k'-points (à la fois ouverts et fermés), et donc n'est plus irréductible.

Il est donc raisonnable d'introduire la définition suivante :

Définition 1.27 *Un k-schéma quasi-projectif X est dit géométriquement irréductible si le $\overline{k}$-schéma $X_{\overline{k}}$ est irréductible.*

Proposition 1.28 *Tout k-schéma quasi-projectif X est une union finie de k-schémas quasi-projectifs irréductibles.*

Démonstration. X est couvert par une union finie d'ouverts affines U_i. En effet, tout ouvert U dans un k-schéma affine de type fini $Spec\, A$ est couvert par une union finie d'ouverts affines, car si I est l'idéal de A tel que U est le complémentaire du fermé défini par I, I admet un nombre fini des générateurs f_j sur A par la propriété de noetherianité satisfaite par les k-algèbres de type fini, et alors $U = \cup_j Spec\, A_{f_j}$.

Chaque U_i est égal à $Spec\, A_i$, où A_i est une k-algèbre de type fini. Une telle algèbre admet un nombre fini d'idéaux minimaux μ_{ij}, et on a alors $Spec\, A_i = \cup_j Spec\, A_{ij}$, où $A_{ij} := A_i/\mu_{ij}$. A_{ij} étant intègre, $Spec\, A_{ij}$ est irréductible. En effet, si deux fermés F et G de $Spec\, A_{ij}$ satisfont $F \cup G = Spec\, A_{ij}$, on peut supposer ces fermés définis par une seule équation f, g respectivement. Alors tout idéal premier de A_{ij} contient soit f soit g et donc contient fg. On a vu (Théorème 1.9) que cela entraîne que fg est nilpotent. Donc $f = 0$ ou $g = 0$ car A_{ij} est intègre. On a donc écrit

$$X = \cup_{i,j} U_{i,j}$$

avec $U_{i,j}$ irréductible et fermé dans $Spec\, A_i$. Il en résulte que $X = \cup_{i,j} \overline{U}_{i,j}$, où $\overline{U}_{i,j}$ est la clôture de Zariski de $U_{i,j}$ dans X. Mais comme $U_{i,j}$ est irréductible, $\overline{U}_{i,j}$ est aussi irréductible. ■

Schémas réduits.

Définition 1.29 *Un k-schéma de type fini X est dit réduit si ses anneaux locaux n'ont pas d'éléments nilpotents non nuls.*

Tout k- schéma de type fini X admet un schéma réduit sous-jacent X_{red}, qui est un k-schéma de type fini, uniquement déterminé par les conditions suivantes :

1. $X_{red} \subset X$ est un sous-schéma fermé.
2. $X_{red} = X$ comme espaces topologiques.
3. La structure d'espace annelé de X_{red} sur l'espace topologique X est déduite de celle de X en considérant le faisceau d'anneaux $U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_U)/R_U$, où R_U est l'ensemble des éléments nilpotents de $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ (c'est un idéal).

Il suffit de vérifier que ceci définit bien un faisceau pour conclure à l'existence de X_{red}. Cela se voit en notant que si A est un anneau et μ est un idéal premier de A, et R, resp. R_μ, est le radical nilpotent de A, resp. A_μ, on a $R \subset \mu$, $R_\mu = RA_\mu$ et $(A/R)_\mu = A_\mu/R_\mu$.

Il est immédiat que X_{red} est aussi un k-schéma de type fini. ∎

Théorème 1.30 *Un k-schéma quasi-projectif est irréductible et réduit si et seulement si il est connexe et ses anneaux locaux sont intègres.*

Démonstration. Supposons que X est connexe et que ses anneaux locaux sont intègres. En particulier X est réduit. Soit d'autre part U un ouvert affine non vide de X. Soit A l'anneau des fonctions algébriques sur U. C'est un anneau intègre puisque ses localisés sont intègres. Il en résulte que U est irréductible, comme on l'a vu dans la démonstration de la proposition 1.28. On va montrer que U est Zariski dense dans X. Cela entraînera immédiatement que X est irréductible.

Pour cela, notons que par l'argument précédent, tout ouvert non vide de U est dense dans U. Supposons que U n'est pas dense dans X. Alors il existe un ouvert affine V non vide de X qui ne rencontre pas U. La clôture de Zariski $\overline{V}$ ne peut pas rencontrer $\overline{U}$. En effet si $\mu \in \overline{V} \cap \overline{U}$, il existe un ouvert affine W de X contenant μ. Cet ouvert rencontre U et V et donc $W \cap U$ et $W \cap V$ sont denses dans W, et donc d'intersection non vide, contradiction. Pour conclure, on note que $X \setminus \overline{U}$ est couvert par une union finie d'ouverts affines V_i, et ce qui précède montre que $X \setminus \overline{U}$ contient les $\overline{V}_i$. Donc $X \setminus \overline{U}$ est fermé, et donc vide car X est connexe.

Inversement, supposons X irréductible et réduit. La connexité est alors évidente. Soit d'autre part U un ouvert affine non vide de X. Soit A l'anneau des fonctions algébriques sur U. C'est un anneau intègre. En effet, si ce n'est pas le cas, on a $fg = 0$, $f \neq 0$, $g \neq 0$ et l'ouvert $U = Spec\,A$ est l'union de l'ensemble F_f des idéaux premiers contenant f et de l'ensemble F_g des idéaux premiers contenant g. Leur intersection est vide car en un point μ de l'intersection, l'anneau local A_μ ne serait pas intègre. Alors X s'écrit comme l'union des fermés $X \setminus Spec\,A$, et des clôtures de Zariski $\overline{F}_f$, $\overline{F}_g$, ce qui contredit l'irréductibilité.

∎

Définition 1.31 *Une variété (définie sur k) est un k-schéma quasi-projectif irréductible et réduit.*

Ce qui précède montre que pour X une k-variété, le corps de fractions $Frac\,A$ ne dépend pas du choix de l'ouvert dense $U = Spec\,A$. On le note $k(X)$. C'est le corps de fonctions de X. On note aussi que le point générique d'un ouvert affine U non vide est un point de X qui ne dépend pas du choix de U, puisque deux ouverts affines ont une intersection dense dans chacun des deux. C'est le point générique de X. Son corps résiduel est par définition $k(X)$.

La dimension d'un tel X est définie comme le degré de transcendance de $k(X)$ sur k. Plus généralement, la dimension d'un schéma de type fini sur k est défini comme la dimension maximale de ses composantes irréductibles.

La notion de dimension (pour un schéma affine) est particulièrement illustrée par le *théorème de Normalisation d'Emmy Noether* :

Théorème 1.32 *Soit A une k-algèbre intègre de type fini sur k, et soit $K = Frac\, A$. Alors si $r = Trdeg(K : k)$, il existe $\theta_1, \ldots, \theta_r \in A$ tels que A est contenue dans la clôture algébrique de l'algèbre de polynômes $k[\theta_1, \ldots, \theta_r]$.*

Rappelons que $a \in A \subset K$ est dans la clôture algébrique de $k[\theta_1, \ldots, \theta_r]$ si $a \in K$ est solution dans K d'une équation algébrique normalisée à coefficients dans $k[\theta_1, \ldots, \theta_r] \subset A$. On dit aussi que A est entière sur $k[\theta_1, \ldots, \theta_r]$.

Démonstration. On va raisonner sur le nombre minimal de générateurs de A, i.e. sur l'entier minimal n tel que A est engendré par des éléments $\theta_1, \ldots, \theta_n$ comme k-algèbre.

Notons qu'on a $n \geq r$ puisque A est un quotient de $k[\theta_1, \ldots, \theta_n]$, de sorte que K est engendré comme sur-corps de k par $\theta_1, \ldots, \theta_n$.

De plus, si $r = n$, l'idéal $I = Ker\, k[\theta_1, \ldots, \theta_n] \to A$ est réduit à 0, car une relation polynomiale entre les θ_i fournirait une relation polynomiale entre les θ_i dans K, qui entraînerait que pour un choix adéquat d'ordre des θ_i, θ_n serait algébrique sur le sous-corps de K engendré par les θ_i, $i \leq n-1$, de sorte qu'on aurait $Trdeg(K : k) < r$. Ceci montre le résultat pour $n = r$.

Supposons maintenant $n > r$. Alors il existe une relation polynomiale $P(\theta_i) = 0$ non triviale à coefficients dans k entre les θ_i. On va montrer que quitte à changer les θ_i par une tranformation linéaire $\theta'_i = \sum_j a_{ij}\theta_j$, $a_{ij} \in k$, la relation $P(\theta_i) = 0$ fournit une relation de dépendance algébrique de θ'_n sur la sous-algèbre A' de A engendrée par $\theta'_1, \ldots, \theta'_{n-1}$, c'est-à-dire une relation

$$Q(\theta'_n) = 0,$$

où Q est à coefficient dans A', et est normalisé.

Ici, on va tricher un peu pour simplifier la preuve, et supposer que le corps k est infini.

Considérons un changement de variables du type

$$\theta'_i = \theta_i - \alpha_i\theta_n,\ \theta_n = \theta'_n,$$

où les α_i sont arbitraires dans k, et $\alpha \neq 0$.

L'équation $P(\theta_1, \ldots, \theta_n) = 0$ fournit

$$P'(\theta'_1, \ldots, \theta'_n) := P(\theta'_n + \alpha_i\theta_i, \theta'_n) = 0.$$

Soit d le degré de P, c'est-à-dire le plus grand degré d'un monôme apparaissant dans P. Alors le degré en θ'_n de P' est au plus d. Montrons que pour un choix adéquat des α_i, le coefficient de degré en θ'_n de P' est en fait d, avec nécessairement un coefficient dominant dans k. Pour cela, notons que si P_d est le partie homogène de P de degré d, le coefficient en $(\theta'_n)^d$ de P' est égal à

$$P_d(\alpha_i, 1).$$

Le polynôme P_d étant non nul et homogène de degré d, il ne peut pas s'annuler sur $k^n \setminus \{\alpha_n = 1\}$, car k est infini, ce qui montre le résultat.

Une fois qu'on a ceci, on applique l'hypothèse de récurrence à A', ce qui donne le résultat car $Trdeg(K' : k) = Trdeg(K : k)$, $K' = Frac\, A'$.

(Pour faire marcher la récurrence, il faut utiliser ici le résultat classique disant que si on a une suite d'inclusions

$$A'' \subset A' \subset A$$

d'anneaux unitaires avec A entier sur A' et A' entier sur A'', alors A est entier sur A''). ■

Remarque 1.33 Plus géométriquement, cela signifie que $X = Spec\,A$ admet un morphisme fini sur A_k^r (cf section 1.5).

Normalité.

Définition 1.34 *Une k-variété X est normale si ses anneaux locaux sont normaux, c'est-à-dire intégralement clos dans leur corps de fractions.*

Théorème 1.35 *Toute k-variété X admet une normalisation $n : \widetilde{X} \to X$ qui est une k-variété normale, et est définie par la condition que le morphisme de normalisation n satisfait la propriété suivante : le faisceau $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ s'identifie au faisceau $(n^{-1}\mathcal{O}_X)_{cl}$, où l'indice cl note la clôture intégrale dans le corps de fractions.*

Notons en particulier que les corps de fonctions $k(X)$ et $k(\widetilde{X})$ sont égaux (on dit que X et $\widetilde{X}$ sont birationnellement équivalentes). La normalisation est construite en considérant le préfaisceau associé à $U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_U)_{cl}$ pour U ouvert affine dans X. On note d'abord que c'est un faisceau, qui est bien sûr un faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres. $\widetilde{X}$ est défini comme le "spectre relatif" de ce faisceau, obtenu en recollant les $Spec\,A_{cl} \to Spec\,A$, avec $Spec\,A$ ouvert dans X, via les recollements naturels.

Complétude.

Définition 1.36 *Un k-schéma de type fini X est complet s'il satisfait la propriété suivante : Pour tout k-schéma de type fini Z, la seconde projection $X \times_k Z \to Z$ est fermée.*

Théorème 1.37 *L'espace projectif $\mathbb{P}_k^n$ est complet.*

Démonstration. C'est de la théorie de l'élimination, ou encore cela peut s'obtenir par la version projective du Nullstellensatz (Théorème 1.9). Celle-ci dit dans le cas projectif qu'un idéal I gradué de $k[X_0, \ldots, X_n]$ avec k algébriquement clos, satisfait la condition que le sous-schéma associé est vide si et seulement si pour $m >> 0$, on a $I_m = k[X_0, \ldots, X_n]_m$, où l'indice m note le morceau gradué de degré m.

On applique cela de la façon suivante : on a la projection $p_2 : \mathbb{P}_k^n \times_k Z \to Z$ et on veut montrer qu'elle est fermée. Soit W un fermé de $\mathbb{P}_k^n \times_k Z$. On veut montrer que $p_2(W)$ est fermé. On peut supposer W irréductible réduit. On peut remplacer Z par la clôture de Zariski de $p_2(W)$. On veut alors montrer que $Z = p_2(W)$. Supposons qu'on ait un point μ de Z qui n'est pas dans $Im\,p_2$. Ici on peut remplacer Z par un voisinage affine $U = Spec\,A$ de μ dans Z, et W est alors défini au-dessus de U par un idéal I de $A[X_0, \ldots, X_n]$ homogène en les X_i. On applique alors le Nullstellensatz qui montre que l'idéal I restreint à la fibre de $\mathbb{P}_k^n \times_k Z$ au-dessus de μ, c'est-à-dire

$\mathbb{P}^n_{k_\mu}$, contient la puissance m-ième de l'idéal $< X_0, \ldots, X_n >$ pour un certain m. Il en résulte (par Nakayama) qu'il existe un ouvert non vide $V \subset U$ contenant μ tel que l'idéal $I_{|U}$ contient $< X_0, \ldots, X_n >^m$. Mais alors aucun point de U n'est dans $Im\, p_2$, ce qui contredit le fait que $Im\, p_2$ est Zariski dense dans Z. ■

Corollaire 1.38 *Tout k-schéma projectif est complet.*

On a inversement.

Proposition 1.39 *Un k-schéma quasi-projectif est complet si et seulement si il est projectif.*

En effet, soit $j : X \hookrightarrow Y$ l'inclusion ouverte de X dans un schéma projectif. Comme X est complet, cette inclusion est fermée. En effet, elle se factorise par l'inclusion fermée du graphe $(Id, j) : X \hookrightarrow X \times Y$ et la projection $X \times_k Y \to Y$, qui est fermée si X est complet. Donc $X = \overline{X}$, la clôture de Zariski de X dans Y. Donc X est en fait fermé dans Y et donc est projectif. ■

Remarque 1.40 On a utilisé ici le fait que le graphe d'un morphisme de k-schémas quasi-projectifs est fermé. Cela résulte du fait que ce graphe est l'image inverse par l'application $(j, Id) : X \times_k Y \to Y \times_k Y$ de la diagonale de Y. Or la diagonale de Y est fermée, comme on l'a déjà vu.

1.5 Premières propriétés des morphismes

Platitude.

Définition 1.41 *Un morphisme $\phi : X \to Y$ de k-schémas est dit plat si via le morphisme de pull-back*

$$\phi^* : \phi^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$$

les anneaux locaux de X sont plats sur les anneaux locaux de Y. En d'autres termes : pour μ dans X et $\nu = \phi(\mu) \in Y$, $\mathcal{O}_{X,\mu}$ est plat sur $\mathcal{O}_{Y,\nu}$.

Cette notion sera particulièrement intéressante lorsqu'on introduira la notion de pull-back (tiré en arrière en français!!) des faisceaux cohérents.

Exemple 1.42 Supposons que X est réduit et irréductible. Le morphisme de normalisation $n : \widetilde{X} \to X$ n'est plat que si X est normal et donc n est un isomorphisme.

Il faut pour cela utiliser le lemme suivant :

Lemme 1.43 *Si A est Noetherien local et B est un A-module plat sur A de type fini, alors B est localement libre.*

Preuve. C'est une conséquence de Nakayama : soient $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_s$ une base de $B/\mu B$ comme k_μ-module, où μ est l'idéal maximal de A et $k_\mu = A/\mu$. Alors par Nakayama, des relèvements (arbitraires) b_i de $\overline{b}_i$ dans B engendrent B comme A-module. On a donc une suite exacte de A-modules

$$0 \to R \to A^s \to B \to 0,$$

qui par hypothèse induit un isomorphisme

$$A^s \otimes_A k_\mu \cong B \otimes_A k_\mu.$$

Or comme B est plat, la suite exacte ci-dessus induit une suite exacte

$$0 \to R \otimes_A k_\mu \to A^s \otimes_A k_\mu \to B \otimes_A k_\mu \to 0,$$

(symétrie des "Tor").

Donc $R \otimes_A k_\mu = 0$ ce qui équivaut par Nakayama à $R = 0$. Donc B est libre. ■

Propreté.

Définition 1.44 *Un morphisme $\phi : X \to Y$ de k-schémas de type fini séparés est propre s'il est universellement fermé, c'est-à-dire que pour tout k-schéma Z, le morphisme naturel $\phi_Z : X \times_k Z \to Y \times_k Z$ est fermé.*

Exemple 1.45 Un k-schéma de type fini X est complet si et seulement si le morphisme canonique $X \to Spec\, k$ est propre. Plus généralement, les projections $X \times_k Y \to Y$ sont propres pour X complet.

Remarque 1.46 Cela équivaut à dire que $X \to Spec\, k$ est propre.

Exercice 1.47 Supposons que X est réduit et irréductible. Le morphisme de normalisation $n : \widetilde{X} \to X$ est propre.

Morphismes affines.

Définition 1.48 *Un morphisme $\phi : X \to Y$ de k-schémas de type fini est dit affine si pour tout ouvert affine U de Y, $\phi^{-1}(U)$ est affine.*

Exemple 1.49 *Par construction, le morphisme de normalisation est affine.*

Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme affine de k-schémas de type fini. On a un faisceau associé

$$\phi_* \mathcal{O}_X$$

sur Y, qui est un faisceau de $\mathcal{O}_Y$-algèbres. En effet, on utilise la flèche naturelle

$$\mathcal{O}_Y \to \phi_*(\phi^{-1}\mathcal{O}_Y)$$

et le morphisme de pull-back :

$$\phi^* : \phi^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$$

pour construire la flèche $\mathcal{O}_Y \to \phi_*\mathcal{O}_X$. Notons que comme ϕ est affine, ce faisceau de $\mathcal{O}_Y$-algèbres détermine X comme le spectre relatif de $\phi_*\mathcal{O}_X$, obtenu en recollant les schémas affines $Spec\, \phi_*\mathcal{O}_X(U)$ au-dessus des ouvets affines U de Y via les recollements naturels donnés par la propriété de faisceaux de $\phi_*\mathcal{O}_X$.

Finitude.

La notion de finitude est extrêmement restrictive :

Définition 1.50 *Un morphisme ϕ comme ci-dessus est fini s'il est affine, et si via la flèche $\mathcal{O}_Y \to \phi_*\mathcal{O}_X$, les anneaux $(\phi_*\mathcal{O}_X)_\nu$, $\nu \in Y$ sont des extensions algébriques des anneaux locaux $\mathcal{O}_{Y,\nu}$.*

Remarque 1.51 La notion d'extension algébrique est ici au sens fort des extensions algébriques d'anneaux : tout élément de $(\phi_*\mathcal{O}_X)_\nu$, $\nu \in Y$ doit satisfaire une équation polynomiale *normalisée* à coefficients dans $\mathcal{O}_{Y,\nu}$. On dit aussi que $(\phi_*\mathcal{O}_X)_\nu$ est entier sur $\mathcal{O}_{Y,\nu}$.

Remarque 1.52 Un tel morphisme est propre. Les anneaux de fonctions de X étant entiers sur ceux de Y, cela résulte des théorèmes généraux de relèvement des idéaux premiers dans des extensions algébriques (cf [7], Theorem 5 page 34).

On verra plus loin comment construire des morphismes finis en considérant des revêtements cycliques.

Image inverse et Fibre. Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme de k-schémas de type fini. Soit Z un sous-schéma fermé de Y. L'image inverse de Z est l'espace topologique $\phi^{-1}(Z)$, muni de la structure schématique suivante : Pour tout point $\nu \in Z$, soit $U = Spec\, A$ un voisinage affine de ν et soit I l'idéal définissant $Z \cap U$. Alors $\phi^{-1}(Z) \cap \phi^{-1}(U)$ est défini dans chaque ouvert affine V tel que $\phi(V) \subset U$ par l'idéal $\phi^*(I) \subset \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$.

En d'autres termes, le faisceau d'idéaux définissant $\phi^{-1}(Z)$ est égal à l'image de $\phi^*\mathcal{I}_Z$ dans $\mathcal{O}_X$.

Soit μ un point de Y et $k_\mu = \mathcal{O}_{Y,\mu}/\mu$ son corps résiduel. Soit $U = Spec\, A$ un ouvert affine de Y contenant μ. Alors μ s'identifie à un idéal premier de A. On a alors le sous-schéma X'_μ de X défini comme l'image inverse du sous-schéma défini par μ.

La fibre X_μ en μ est le k_μ-sous-schéma de X'_μ défini de la façon suivante : topologiquement, c'est $\phi^{-1}(\mu)$. Schématiquement, les anneaux locaux de X_μ sont ceux de X'_μ tensorisés par k_μ. (On note que les anneaux locaux de X'_μ sont des A/μ-modules, et que le produit tensoriel est pris sur A/μ). En d'autres termes, cette fibre X_μ est la fibre générique du morphisme induit $X'_\mu \to Spec\, A/\mu$.

Remarque 1.53 On aurait pu aussi introduire le morphisme naturel $Spec\, k_\mu \to Y$ (point générique du sous-schéma irréductible défini par μ) et définir X_μ comme le produit fibré

$$X_\mu = X \times_Y Spec\, k_\mu.$$

Noter que si μ est un idéal maximal, alors $k_\mu = A/\mu$ et $X_\mu = X'_\mu$.

1.6 Pourquoi les schémas ?

Puisque tout k-schéma quasi-projectif est une union de schémas irréductibles, et admet d'autre part un sous-schéma réduit sous-jacent, qui a le même spectre, on peut se demander pourquoi il est utile de considérer également des schémas non réduits, et non pas seulement les variétés.

- **Raison 1**. Si on veut compactifier les familles de variétés, on doit en général accepter les fibres non réduites. Ici la notion de famille de variétés est simplement la donnée d'un morphisme plat et propre $X \to B$ entre deux variétés.

Exemple 1.54 Considérons $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ défini par l'équation (homogène en X_0, X_1 et en Y_0, Y_1, Y_2) :

$$F = X_0(Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2) + X_1 Y_0^2.$$

On peut montrer que X est géométriquement irréductible, et que le morphisme sur $\mathbb{P}^1$ donné par la première projection est plat. La fibre au-dessus des points $t \in \mathbb{P}^1$ tels que $X_0 \neq 0$ en t est une conique plane réduite (singulière lorsque $X_0 = -X_1$), et au-dessus du "point à l'infini" où $X_0 = 0$, elle devient non-réduite.

Raison 2. En théorie des déformations, les schémas artiniens irréductibles, qui sont les schémas affines correspondant aux anneaux artiniens locaux, jouent un rôle très important. Or ces schémas correspondent à des anneaux de fonctions où tous les éléments non inversibles sont nilpotents, l'espace topologique sous-jacent étant réduit à un point.

Exemple 1.55 Considérons le schéma $D_2 := Spec\, k[t]/t^2$. Si X est un k-schéma, un morphisme de k-schémas $D_2 \to X$ est la donnée d'un k-point de X et d'un jet d'ordre 1 passant par ce point. Si X est lisse, (voir section 7.3), l'ensemble de ces morphismes est exactement l'ensemble des k-points du fibré vectoriel T_X. (De même qu'en géométrie différentielle, on peut définir les vecteurs tangents comme les arcs définis à l'ordre 1.)

2 Faisceaux cohérents

2.1 Faisceaux quasi-cohérents sur les schémas affines

Soit $X = Spec\, A$ un schéma affine, où A est une k-algèbre de type fini. Soit M un A-module, non nécessairement de type fini. Pour chaque $f \in A$, on a le localisé M_f qui est un A_f-module. Ceci définit un préfaisceau $\widetilde{M}$ sur X, défini sur les ouverts affines $U_f = Spec\, A_f$ par $\widetilde{M}(U_f) = M_f$. Le germe $\widetilde{M}_\mu$ de ce préfaisceau au point $\mu \in spec\, A$ est le localisé M_μ de M relativement à $A \setminus \mu$. Il est à distinguer de la fibre en μ, qu'on notera $\widetilde{M}_{(\mu)}$, qui est le k_μ-espace vectoriel défini par

$$\widetilde{M}_{(\mu)} = \widetilde{M}_\mu \otimes_{A_\mu} k_\mu.$$

La proposition suivante montre que $\widetilde{M}$ est en fait un faisceau, qui est bien sûr un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules.

Proposition 2.1 *Pour chaque ouvert affine U_f de $Spec\, A$, on a*

$$\Gamma(U_f, \widetilde{M}) = M_f = \widetilde{M}(U_f).$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la proposition 1.3. On montre que si $U_f = U_{f_1} \cup \ldots \cup U_{f_k}$, alors l'ensemble des

$$(\sigma_i) \in M_{f,f_i},\, \sigma_i = \sigma_j \text{ dans } M_{f,f_i f_j} \tag{1}$$

s'identifie à M_f. Pour cela on utilise l'existence d'une relation dans A :

$$f^r = \sum_i g_i f_i^{l_i}$$

pour tout choix de $l_i \geq 0$, où les g_i dépendent de l_i. Cela montre tout d'abord l'injectivité de la flèche naturelle

$$M_f \to \prod_i M_{f_i}.$$

En effet, si $m \in M_f$ s'annule dans chaque M_{f,f_i} on a $f_i^{l_i} m = 0$ dans M_f pour des $l_i > 0$. La relation $f^r = \sum_i g_i f_i^{l_i}$ combinée avec $f_i^{l_i} m = 0$ donne alors $f^r m = 0$ et donc $m = 0$ dans M_f.

Cette relation donne aussi la surjectivité de M_f sur l'ensemble (1), comme dans la démonstration de 1.3. En effet, donnons-nous des $\sigma_i \in M_{f,f_i}$ comme ci-dessus, avec $\sigma_i - \sigma_j = 0$ dans M_{f,f_i,f_j}. Alors il existe des $l_{i,j} > 0$ qu'on peut tous supposer égaux à un certain entier s, tels que $f_i^s \sigma_i$ provient d'un élément m_i de M_f et $f_j^s(\sigma_i - \sigma_j) = 0$ dans M_{f,f_i}. Il existe $g_i \in A$ tels que $f^r = \sum_i g_i f_i^s$. Posons alors

$$m = \frac{1}{f^r} \sum_i g_i m_i \in M_f.$$

Dans M_{f,f_i} on a $m_i = f_i^s \sigma_i$ et $m_j = f_j^s \sigma_j = f_j^s \sigma_i$. Donc

$$m = \frac{1}{f^r} \sum_j g_j f_j^s \sigma_j = \frac{1}{f^r} (\sum_j g_j f_j^s) \sigma_i = \sigma_i$$

dans M_{f,f_i}. ∎

Définition 2.2 *Un faisceau quasi-cohérent sur un k-schéma de type fini X est un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-modules localement isomorphe à un faisceau du type $\widetilde{M}$.*

Cela signifie qu'il existe un recouvrement affine de X par des ouverts $U_i = Spec\, A_i$, tels que la restriction de $\mathcal{F}$ à U_i soit isomorphe à $\widetilde{M_i}$.

Remarque 2.3 On peut supposer ce recouvrement ouvert fini. En effet, les k-schémas de type fini ont la propriété remarquable que tout ouvert est compact. Il suffit de le vérifier pour les k-schémas affines $X = Spec\, A$. Si $X = \cup_i U_i$, où U_i est le complémentaire d'un fermé F_I défini par un idéal $J_i \subset A$, alors $\sum_i J_i \subset A$ ne contient aucun idéal premier de A, ce qui entraîne que $1 \in \sum_i J_i$. Mais alors il existe un nombre fini d'indices $i_1, \ldots, i_n$ tels que $1 \in \sum_1^n J_i$ et donc $\cup_1^n U_i = Spec\, A$.

Théorème 2.4 *Tout faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur un k-schéma affine $X = Spec\, A$ de type fini est isomorphe à $\widetilde{M}$ pour un A-module M.*

Remarque 2.5 Notons que la flèche $M \mapsto \widetilde{M}$ admet alors pour inverse, d'après la proposition 2.1, la flèche $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$. Cette flèche est alors clairement une équivalence de catégories entre A-modules et faisceaux quasi-cohérents sur $Spec\, A$.

Démonstration du théorème 2.4. On va d'abord montrer que si $U_f = Spec\, A_f$ et $\sigma \in \mathcal{F}(U_f)$ est une section, alors pour un entier r, $f^r\sigma$ s'étend en une section de $\mathcal{F}$ sur X. Pour voir ceci, on rappelle que X a un recouvrement fini par des $U_i = Spec\, A_{f_i}$ tels que $\mathcal{F}_{|U_i} = \widetilde{M_i}$, où M_i est un A_{f_i}-module. Alors par définition de $\widetilde{M_i}$ il existe r_i tel que $f^{r_i}\sigma_{|U_f \cap U_{f_i}}$ provient d'un élément de M_i, c'est-à-dire d'une section de σ_i de $\mathcal{F}$ sur U_i. On peut supposer tous les r_i égaux à un certain r_0. Alors $\sigma_i - \sigma_j$ s'annule sur $U_i \cap U_j \cap U_f$ puisque c'est la différence des restrictions de $f^{r_0}\sigma$ à $U_i \cap U_f$ et $U_j \cap U_f$. Il en résulte que pour un certain r_{ij} que l'on peut supposer constant égal à r_1, on a $f^{r_1}(\sigma_i - \sigma_j) = 0$ sur $U_i \cap U_j$, puisque l'espace des sections de $\mathcal{F}$ sur $U_f \cap U_i \cap U_j$ est celui des sections de $\mathcal{F}$ sur $U_i \cap U_j$, localisé en f. Il en résulte que les $f^{r_0+r_1}\sigma_i$ se recollent en une section de $\mathcal{F}$ sur X.

Soit maintenant $M := \Gamma(X, \mathcal{F})$. C'est un A-module. On a un morphisme évident ϕ de $\widetilde{M}$ dans $\mathcal{F}$. Ce qui précède montre que ce morphisme est surjectif. En effet, le résultat précédent peut s'énoncer en disant que la flèche $M_f = \Gamma(U_f, \widetilde{M}) \to \Gamma(U_f, \mathcal{F})$ est surjective, de sorte que la flèche $\widetilde{M} \to \mathcal{F}$ est surjective sur les germes.

Mais d'autre part, ce morphisme est aussi injectif, car on a par la caractérisation des faisceaux une injection

$$M \hookrightarrow \oplus_i M_i, \tag{2}$$

où $M_i = \Gamma(U_i, \mathcal{F}_{|U_i})$. Ici, les U_i sont des ouverts affines pour lesquels il existe des $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$-modules N_i tels que

$$\mathcal{F}_{|U_i} = \widetilde{N}_i.$$

Alors on a, par la proposition 2.1, $M_i = N_i$ et $\widetilde{M_i} = \mathcal{F}_{|U_i}$. Si $\mu \in X$ est un idéal premier, on a une injection induite par (2) :

$$M_\mu \hookrightarrow \oplus_{i, \mu \in U_i} M_{i,\mu}$$

Or le terme de gauche est le germe $\widetilde{M_\mu}$, et le terme de droite est la somme directe d'un certain nombre de copies de $\mathcal{F}_\mu$, la flèche étant la somme directe de $\phi_\mu : \widetilde{M_\mu} \to \mathcal{F}_\mu$. Donc ϕ_μ est injective, ainsi que ϕ.

■

Définition 2.6 *Un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur un k-schéma de type fini est dit cohérent si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules de rang fini.*

Noter que les rangs des fibres $\mathcal{F}_{(\mu)}$ comme k_μ-espace vectoriel dépendent de μ. On a :

Lemme 2.7 *L'application $\mu \mapsto rang_{k_\mu}\mathcal{F}_{(\mu)}$ est semi-continue supérieurement sur X.*

Démonstration. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ des générateurs de $\mathcal{F}_{(\mu)}$ sur k_μ. Soient $\tau_1, \ldots, \tau_r$ des relèvements de σ_i dans $\mathcal{F}_\mu$. Alors par Nakayama, l'application naturelle

$$\mathcal{O}^r_{X,\mu} \to \mathcal{F}_\mu$$

donnée par les τ_i est surjective. Il existe un ouvert affine U de μ où les τ_i s'étendent en sections globales τ_i' de $\mathcal{F}$. L'application

$$\mathcal{O}_U^r \to \mathcal{F}_U$$

est déterminée par l'application correspondante au niveau des sections globales (théorème 2.4). Cette dernière étant surjective après localisation au point μ, son conoyau est nul après localisation au point μ, et donc est nul sur un ouvert affine $U' \subset U$ contenant μ. Il en résulte qu'on a la surjectivité de l'application

$$\Gamma(U', \mathcal{O}_{U'}^r) \to \Gamma(U', \mathcal{F}_{U'})$$

et donc aussi par le théorème 2.4 la surjectivité de la flèche

$$\mathcal{O}_{U'}^r \to \mathcal{F}_{U'}$$

qui est donnée par les τ_i'. Il en résulte que pour tout point $\nu \in U'$, on a

$$rang_{k_\nu} \mathcal{F}_{(\nu)} \leq r.$$

■

Exemple 2.8 Considérons $X = A_k^n = Spec\, k[X_1, \ldots, X_n]$ et soit I l'idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par $X_1, \ldots, X_n$. C'est un idéal premier μ, (en fait maximal de corps résiduel k, le k-point correspondant étant $0 \in A_k^n(k)$). Si U est un ouvert de A_k^n ne contenant pas μ, alors le faisceau d'idéaux (cf section 3) $\mathcal{I} := \widetilde{I}$ est trivial de rang 1 sur U : on a $\mathcal{I}_U \cong \mathcal{O}_U$ car au voisinage de tout point de U, l'un des X_i devient inversible. Par contre, le rang de $\mathcal{I}_{(\mu)}$ sur $k_\mu = k$ est égal au rang de

$$\mathcal{I}_\mu \otimes k = \mathcal{I}_\mu / \mathcal{I}_\mu^2 = I/I^2$$

sur k, c'est-à-dire n.

2.2 Opérations sur les faisceaux

Pull-back. Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme de k-schémas de type fini. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi-cohérent (resp. cohérent) sur Y. On définit le pull-back $\phi^*\mathcal{E}$ sur X, qui est un faisceau quasi-cohérent (resp. cohérent), de la façon suivante :

Rappelons tout d'abord la définition du faisceau $\phi^{-1}(\mathcal{E})$ qui est un faisceau de $\phi^{-1}\mathcal{O}_Y$-modules (resp. modules de type fini) : Pour U un ouvert de X, on a

$$\phi^{-1}(\mathcal{E})(U) := \varinjlim_{V \supset \phi(U)} \mathcal{E}(V).$$

Le faisceau $\phi^*\mathcal{E}$ est défini par :

$$\phi^*\mathcal{E} = \phi^{-1}(\mathcal{E}) \otimes_{\phi^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X,$$

où on utilise le morphisme $\phi^* : \phi^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ pour prendre le produit tensoriel. Ce produit tensoriel est bien entendu le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \phi^{-1}(\mathcal{E})(U) \otimes_{\Gamma(U, \phi^{-1}\mathcal{O}_Y)} \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$.

Sur les germes aux points $x \in X, y = \phi(x) \in Y$, on a, en notant que par définition, $\phi^{-1}(\mathcal{E})_x = \mathcal{E}_y$ canoniquement,

$$\phi^*\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x}.$$

Lorsque $\phi : X \to Y$ est l'inclusion d'un sous-schéma fermé, on note $\phi^*\mathcal{E} =: \mathcal{E}_{|X}$. Lorsque y est un point de Y, il faut distinguer le germe $\mathcal{E}_y$ et la fibre $\mathcal{E}_{|y}$ qu'on a notée $\mathcal{E}_{(y)}$ précédemment. La première est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module, tandis que la seconde est un $k(y)$-module.

Image directe. Pour tout morphisme $\phi : X \to Y$ d'espaces annelés et pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-modules sur X, on dispose du faisceau $\phi_*\mathcal{F}$ sur Y, qui est un faisceau de $\mathcal{O}_Y$-modules.

Proposition 2.9 *Si X et Y sont des k-schémas de type fini et $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent, alors $\phi_*\mathcal{F}$ est quasi-cohérent.*

Si ϕ est projectif et $\mathcal{F}$ est cohérent, alors $\phi_*\mathcal{F}$ est cohérent.

Démonstration. On suppose d'abord que ϕ est affine. Le résultat étant local sur Y, on peut supposer Y affine, $Y = Spec\,B$. Alors comme ϕ est affine, X est affine, $X = Spec\,A$, et $\mathcal{F}$ est donc par le théorème 2.4 de la forme $\widetilde{M}$ pour un A-module M.

Si $f \in B$, on a alors

$$\phi_*\mathcal{F}_{|Y_f} = M_{\phi^* f},$$

c'est-à-dire M_f, où l'on voit ici le A-module M comme un B-module via ϕ^*.

Cela montre bien que $\pi_*\mathcal{F}$ est quasi-cohérent lorsque ϕ est affine.

En général, on peut supposer que Y est affine et couvrir X par des ouverts affines X_i dont les intersections sont aussi affines, et on a par la propriété de faisceaux une suite exacte

$$0 \to \phi_*\mathcal{F} \to \prod_i \phi_{i*}\mathcal{F}_i \to \prod_{i \neq j} \phi_{ij*}\mathcal{F}_{ij}$$

où ϕ_i, resp. ϕ_{ij} sont les restrictions de ϕ à X_i, $X_{ij} := X_i \cap X_j$, et de même $\mathcal{F}_i$, resp. $\mathcal{F}_{ij}$ sont les restrictions de $\mathcal{F}$ à X_i, resp. X_{ij}.

La suite exacte ci-dessus et le fait que les deux termes de droites sont des faisceaux quasi-cohérents comme on l'a déjà vu permettent de conclure.

Pour l'énoncé de cohérence, notons qu'il généralise le théorème 2.46, qui concerne le cas où Y est $Spec\,k$, et ne sera montré qu'à la fin de ce chapitre.

■

Extension des scalaires. Si X est un schéma de type fini sur k et $k \subset k'$ est une extension de corps, on a défini $X_{k'}$ qui est un schéma sur k'. Si maintenant $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X, on peut définir le faisceau étendu $\mathcal{F}_{k'}$ sur $X_{k'}$. Rappelons que si X est couvert par des ouverts affines $U_i = Spec\,A_i$, où les A_i sont des k-algèbres de type fini, $X_{k'}$ est couvert par les ouverts affines $U_{i,k'} := Spec\,A_i \otimes_k k'$. Le faisceau $\mathcal{F}$ est de la forme $\widetilde{M_i}$ pour des A_i-modules M_i sur chaque U_i (théorème 2.4) ; on définit alors $\mathcal{F}_{k'}$ comme étant égal à $\widetilde{M_i \otimes_k k'}$ sur $U_{i,k'}$ avec les règles de recollement évidentes. (Vérifier que c'est un faisceau).

2.3 Faisceaux localement libres

Définition 2.10 *Un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur un k-schéma de type fini X est dit localement libre s'il est localement isomorphe à $\mathcal{O}_X^l$, comme faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules.*

Noter que l est localement constant sur X. Si X est connexe, l est donc constant, et est appelé le rang de $\mathcal{F}$. Lorsqu'on parle de faisceau localement libre de rang l sur X, on sous-entend que le rang l ne dépend pas de la composante connexe.

Exercice 2.11 *Opérations sur les faisceaux localement libres : construire les produits tensoriels, puissances symétriques, extérieures.*

2.3.1 Diviseurs de Cartier et fibrés en droites

Définition 2.12 *Un faisceau inversible sur un k-schéma de type fini X est un faisceau localement libre de rang 1.*

Ces faisceaux sont donc localement isomorphes au faisceau structurel.

Notons que pour $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ deux faisceaux inversibles sur X, leur produit tensoriel $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'$ sur $\mathcal{O}_X$ est encore inversible. Par ailleurs $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}$. Enfin on a l'associativité du produit tensoriel :

$$\mathcal{L}''\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\cong(\mathcal{L}''\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}'.$$

Ces faisceaux sont dits inversibles, car si on note $\mathcal{L}^{-1}$ le dual $Hom\,(\mathcal{L},\mathcal{O}_X)$ on trouve que la flèche naturelle de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}^{-1}\to\mathcal{O}_X$$

est un isomorphisme.

Si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X, les automorphismes de $\mathcal{L}$ comme faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules sont clairement donnés par multiplication par les fonctions inversibles ϕ sur X, $\phi\in\Gamma(X,\mathcal{O}_X^*)$, puisque le faisceau des automorphismes de $\mathcal{L}$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{O}_X^*$. Notons $Pic\,X$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles.

Par ce qui précède, le produit tensoriel munit $Pic\,X$ d'une structure de groupe commutatif.

Diviseurs de Cartier. On supposera ici pour simplifier que X est une variété.

Définition 2.13 *Un diviseur de Cartier sur X est la donnée locale d'une fonction rationnelle non nulle sur X, définie modulo multiplication par une fonction inversible. Rappelons qu'une fonction rationnelle non nulle sur X s'écrit sur tout ouvert affine non vide (et donc dense) $Spec\,A$ de X comme un quotient f/g, où $f\in A$ et $g\in A$ sont non nulles.*

Si $k(X)^*$ est le faisceau constant sur X de fibre le groupe multiplicatif $k(X)^*$, on a une inclusion évidente de faisceaux de groupes multiplicatifs

$$\mathcal{O}_X^*\subset k(X)^*.$$

Le quotient $\mathcal{M} := \Gamma(X, k(X)^*/\mathcal{O}_X^*)$ est alors par définition en bijection avec les diviseurs de Cartier de X. La structure de groupe sur l'ensemble des diviseurs de Cartier est donnée par la multiplication des fonctions rationnelles.

Supposons également que X est normale (cf définition 1.34). (En fait, il suffirait de savoir que X est lisse en codimension 1 [6].) A une fonction rationnelle non nulle f/g sur un ouvert affine $Spec\, A$ est associé le *diviseur de Weil* $D = div\, f/g = div\, f - div\, g$, qu'il faut voir comme une combinaison formelle à coefficients entiers d'hypersurfaces (sous-variétés de codimension 1) irréductibles dans X. Ici, $div\, f$ est défini comme la somme sur tous les idéaux premiers μ_i contenant f et tels que $dim\, A/\mu_i = dim\, A - 1$ des $m_i D_i$, où D_i est l'hypersurface irréductible correspondant à μ_i. Ici m_i est la multiplicité générique de f le long de D_i.

La finitude de cette somme est due au fait que l'anneau A/fA admet un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.

En fait il est préférable de définir directement la multiplicité de D_i dans $div\, f/g$ de la façon suivante : Sous notre hypothèse de normalité, l'anneau A_{μ_i} est de valuation, c'est-à-dire qu'il y a une valuation v_i sur son corps de fractions $Frac\, A_{\mu_i} = Frac\, A$, avec

$$A_{\mu_i} = \{f \in Frac\, A,\ v_i(f) \geq 0\}.$$

Alors la multiplicité de D_i dans $div\, f/g$ est définie comme étant égale à $v_i(f/g)$.

Cette définition montre clairement que l'application

$$Frac\, A \setminus \{0\} \to \text{Diviseurs de Weil}$$

définie ci-dessus est un morphisme de groupes.

Cette définition se généralise aux diviseurs de Cartier. En effet, il est clair que $div\, f/g = div\, \phi f/g$, où ϕ est une fonction inversible. Donc, pour un diviseur de Cartier donné localement par f_i/g_i sur des ouverts affines U_i, les diviseurs de Weil associés sur chaque U_i coïncident sur $U_i \cap U_j$.

A un diviseur de Cartier sur une variété X est également associé un faisceau inversible sur X, muni d'une section rationnelle non nulle. Le diviseur de Cartier étant décrit par la fonction rationnelle ϕ_i sur U_i, ce faisceau inversible est défini comme le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules du faisceau constant $k(X)$ sur X engendré sur U_i par ϕ_i^{-1}. Notons que sur $U_i \cap U_j$ ces faisceaux coïncident car ϕ_i/ϕ_j est inversible.

Pour obtenir une correspondance en sens inverse, introduisons la définition suivante :

Définition 2.14 *Une section rationnelle d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur une variété X est une section du faisceau constant $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} k(X)$.*

Exercice 2.15 *Montrer que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} k(X)$ est bien un faisceau constant (c'est-à-dire que l'espace de ses sections sur un ouvert $U \subset X$ non vide (et donc dense) ne dépend pas de U).*

Si maintenant $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X, et σ est une section rationnelle non nulle de $\mathcal{L}$, le diviseur de Cartier associé est obtenu de la façon suivante : trivialisant $\mathcal{L}$ sur des ouverts affines U_i, σ fournit une fonction rationnelle ϕ_i non nulle sur U_i. Un changement de trivialisation modifie ϕ_i par la multiplication par une fonction inversible, de sorte qu'on a bien défini de cette manière un diviseur de Cartier.

Le fibré inversible $\mathcal{L}$ associé à un diviseur de Cartier D est noté $\mathcal{O}(D)$. Il possède la section rationnelle canonique $1 \in k(X)$.

Inversement, si σ est une section rationnelle non nulle d'un fibré inversible $\mathcal{L}$ et D est le diviseur de Cartier correspondant, on a un isomorphisme canonique $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$ qui envoie la section σ sur la section 1 de $\mathcal{O}_X(D)$.

Remarque 2.16 On peut se demander quand cette section rationnelle est en fait une section algébrique, c'est-à-dire $1 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$. Examinons l'allure locale de cette section : par définition, le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ est le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules du faisceau constant $k(X)$ engendré par ϕ_i^{-1} sur U_i. Dans la trivialisation donnée par ϕ_i^{-1} sur U_i on a $1 = \phi_i \phi_i^{-1}$ et donc 1 est une section algébrique si et seulement si $\phi_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O})$, au lieu d'être seulement une fonction rationnelle. Cela entraîne évidemment que le diviseur de Weil associé à D est *effectif*, c'est-à-dire que toutes ses multiplicités sont ≥ 0 ; en fait la réciproque est également vraie sous l'hypothèse de normalité qu'on a faite. En conclusion, les diviseurs de Cartier dont la section canonique 1 est une section algébrique sont ceux dont le diviseur de Weil associé est effectif.

2.3.2 $\mathcal{O}(1)$ sur un Proj

Evaluation des sections. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Sa fibre $\mathcal{F}_{|\mu}$ en un point μ de corps résiduel k_μ est le k_μ-espace vectoriel de rang fini $\mathcal{F}_\mu \otimes_{\mathcal{O}_{X,\mu}} k_\mu$. On a une flèche naturelle d'évaluation

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}_{|\mu},$$

composée de $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}_\mu$ et $\mathcal{F}_\mu \to \mathcal{F}_{|\mu}$.

Définition 2.17 *Le faisceau $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections globales si les applications de restriction, tensorisées par k_μ, sont surjectives, pour tout point μ de X.*

Exercice 2.18 *Montrer qu'il suffit de montrer la surjectivité des applications de restriction tensorisées par k_μ aux points* fermés *de X.*

Rappelons que si k est algébriquement clos, on a $k = k_\mu$ aux points fermés.

Morphisme dans $\mathbb{P}_k^n$ associé à un faisceau inversible engendré par ses sections.

Soit Y un k-schéma de type fini, et soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur Y, engendré par ses sections globales. Soit $\sigma_0, \ldots, \sigma_r$, $r+1$ sections globales de $\mathcal{L}$ engendrant $\mathcal{L}$ en tout point. (L'existence de r résulte du fait suivant : si σ engendre $\mathcal{L}$ au point μ, alors σ engendre $\mathcal{L}$ sur l'ouvert contenant μ et complémentaire du support de $div\,\sigma$. Comme Y est compact, un nombre fini de sections suffisent donc pour engendrer $\mathcal{L}$.) Soit Y_i l'ouvert de Y où σ_i ne s'annule pas. Sur Y_i, les σ_j/σ_i sont des fonctions (ce sont des fonctions rationnelles globalement sur Y). D'après la proposition 1.14, on a un morphisme ϕ_i de Y_i dans l'ouvert standard U_i de $\mathbb{P}_k^r$ donné par le morphisme de k-algèbres

$$k[X_j/X_i] \to \Gamma(Y_i, \mathcal{O}_{Y_i}),$$

$$X_j/X_i \mapsto \sigma_j/\sigma_i.$$

On vérifie que les ϕ_i se recollent sur $Y_i \cap Y_j$ (où elles sont à valeurs dans $U_i \cap U_j$) pour donner un morphisme $\phi : X \to \mathbb{P}^r_k$.

Le faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$. Le fibré inversible $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^n_k$ (et plus généralement sur un "Proj") peut se construire de deux manières :

- **1.** Il est isomorphe au faisceau inversible $\mathcal{O}(H)$, où H est une section hyperplane de $\mathbb{P}^n_k$. Plus précisément, soit $X = \sum_i \alpha_i X_i \neq 0$ l'équation linéaire globale définissant H. $\mathcal{O}(H)$ est le diviseur de Cartier donné par X/X_i sur U_i. Il a clairement pour diviseur de Weil associé l'hypersurface H comptée avec multiplicité 1.

Notons que la classe d'isomorphisme de $\mathcal{O}(H)$ ne dépend pas du choix de H, car si on a deux sections hyperplanes H et H' définies par des formes linéaires non nulles X et X' sur k^{n+1}, le quotient X/X' est une fonction rationnelle sur $\mathbb{P}^n_k$ qui a pour diviseur $H - H'$. Alors la multiplication par X'/X (agissant sur le faisceau constant de fibre $k(\mathbb{P}^n_k)$) identifie $\mathcal{O}(H)$ et $\mathcal{O}(H')$.

- **2.** On définit directement un faisceau inversible $\mathcal{O}_Y(1)$ sur $Y = Proj\, A$, pour toute k-algèbre graduée de type fini A engendrée en degré 1, de générateurs X_i, $i = 0, \ldots, X_n$, de la manière suivante : D'après la définition de $Proj\, A$ on peut définir le faisceau structurel de $Y = Proj\, A$ par $\mathcal{O}_{Y_i} := \{a \in A_{X_i},\, deg\, a = 0\}$, où Y_i est l'ouvert de Y défini par $X_i \neq 0$.

En effet, si $A = k[X_0, \ldots, X_n]/I$, cet ensemble s'identifie bien à

$$k[X_0/X_i, \ldots, X_n/X_i]/I_{i,0},$$

où $I_{i,0}$ est la partie de degré 0 du localisé de I le long de X_i, ou encore à

$$k[X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_n]/I_i,$$

où I_i est l'image de I dans $k[X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_n]$ par le morphisme d'algèbres

$$k[X_0, \ldots, X_n] \to k[X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_n]$$

qui envoie X_i sur 1 (ce sont les deux versions du processus de "déshomogénéisation" des idéaux gradués).

Il est alors clair que via la multiplication par X_i^{-1},

$$\{a \in A_{X_i},\, deg\, a = 1\}$$

est isomorphe à $\Gamma(Y_i, \mathcal{O}_{Y_i})$ et on a donc sur Y_i un $\mathcal{O}_{Y_i}$-module libre $\mathcal{L}_i$ de rang 1 isomorphe via la section X_i^{-1} à $\mathcal{O}_{Y_i}$. Les recollements sont évidents sur les intersections : on a en effet une identification naturelle du localisé en X_j/X_i de $\{a \in A_{X_i},\, deg\, a = 1\}$ avec le localisé en X_i/X_j de $\{a \in A_{X_j},\, deg\, a = 1\}$, donnée par la multiplication par X_i/X_j qui est inversible sur $Y_i \cap Y_j$. Les deux s'identifient à $\{a \in A_{X_j X_i},\, deg\, a = 1\}$.

Notation. On notera $\mathcal{O}_Y(l) := \mathcal{O}_Y(1)^{\otimes l}$ pour $l \geq 0$, et $\mathcal{O}_Y(-l) := \mathcal{O}_Y(-1)^{\otimes l}$ pour $l \geq 0$, où

$$\mathcal{O}_Y(-1) := \mathcal{O}_Y(1)^* := Hom\,(\mathcal{O}_Y(1), \mathcal{O}_Y).$$

Les sections globales de ces faisceaux sur $\mathbb{P}^n_k$ sont décrites de la façon suivante, expliquant le rôle de l'algèbre graduée $k[X_0, \ldots, X_n]$ dans la géométrie de $\mathbb{P}^n_k$.

Théorème 2.19 *$\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1))$ est le k-espace vectoriel $< X_0, \dots, X_n >$.*

Plus généralement, pour $l \geq 0$, $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l))$ s'identifie à la partie graduée $k[X_0, \dots, X_n]_l$ de degré l de $k[X_0, \dots, X_n]$.

Pour $l < 0$, et $n > 0$, on a $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)) = 0$.

Démonstration. Tout d'abord, notons que par la définition de $\mathcal{O}(1)$, les formes linéaires sur k^{n+1}, c'est-à-dire les combinaisons linéaires des X_i à coefficients dans k sont naturellement des sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)$.

En effet, si on regarde la définition **2**, une telle forme linéaire a fournit bien un élément a_i de degré 1 de l'algèbre localisée $k[X_0, \dots, X_n]_{X_i}$ sur chaque U_i, et comme les recollements sont donnés par les recollements naturels, on a bien $a_i = a_j$ sur $U_i \cap U_j$.

On dispose donc pour chaque l d'une application naturelle

$$k[X_0, \dots, X_n]_l \cong H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l)).$$

Le dernier énoncé est clair du fait qu'on a déjà vu que

$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}) = k,$$

alors que $H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l))$ admet des sections (par exemple X_0^l) qui s'annulent en au moins un point pour $l > 0$ (ici il faut $n > 0$ pour avoir des points satisfaisant $X_0^l = 0$). Le second énoncé se montre par double récurrence sur $l \geq 0$ et n. En effet, via la multiplication par X_n, $\mathcal{O}(-1)$ s'identifie au faisceau d'idéaux (voir section 3) $\mathcal{I}_H \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$, où $H \cong \mathbb{P}^{n-1}_k$ est l'hyperplan défini par $X_n = 0$. On a donc la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l) \xrightarrow{X_n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l+1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}_k}(l+1) \to 0.$$

On a des flèches naturelles injectives

$$k[X_0, \dots, X_n]_l \to \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l))$$

pour chaque n et l, et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & k[X_0, \dots, X_n]_l & \to & k[X_0, \dots, X_n]_{l+1} & \to & k[X_0, \dots, X_{n-1}]_{l+1} \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l)) & \to & \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l+1)) & \to & \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}_k}(l+1)) \end{array}$$

où par l'hypothèse de récurrence sur l et n respectivement, les flèches verticales de gauche et de droite sont des isomorphismes.

Enfin le résultat est clairement vrai pour $n = 0$, $l \geq 0$, et il a déjà été montré pour tout n et $l = 0$ (Proposition 1.5). ∎

Si X est un k-schéma, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X et $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ des sections globales engendrant $\mathcal{L}$ en tout point, on a construit plus haut un morphisme $\phi : X \to \mathbb{P}^n_k$.

Lemme 2.20 *On a un isomorphisme*

$$\phi^* \mathcal{O}(1) \cong \mathcal{L}$$

tel que $\phi^* X_i = \sigma_i$.

Démonstration. Le faisceau $\mathcal{L}$ est trivialisé sur $\{\sigma_i \neq 0\}$ par la section σ_i et les fonctions de transition sur $\{\sigma_i \neq 0\} \cap \{\sigma_j \neq 0\}$ sont données par la multiplication par σ_j/σ_i. Or par définition du morphisme ϕ, on a $\phi^*(X_i/X_j) = \sigma_i/\sigma_j$, où ϕ^* est le pull-back des fonctions rationnelles. Le résultat en découle immédiatement. ■

2.3.3 Grassmanniennes

La grassmannienne $G(r,n)_k$ est aux fibrés de rang $n-r$ engendrés par n sections ce que l'espace projectif $\mathbb{P}_k^{n-1}$ est aux fibrés inversibles engendrés par leurs sections. Cela signifie qu'elle admet un fibré localement libre $\mathcal{Q}$ de rang $n-r$ dit *tautologique* engendré par n sections, et qu'elle satisfait la propriété universelle qu'à tout k-schéma projectif X, et tout faisceau localement libre $\mathcal{F}$ de rang $n-r$ muni de n sections l'engendrant en tout point, on peut associer un unique morphisme

$$\phi : X \to G(r,n)_k$$

tel que $\phi^*\mathcal{Q} = \mathcal{F}$, et inversement.

A cause de cette propriété, on voit que les k-points de $G(r,n)_k$ s'identifient aux k-sous-espaces vectoriels de rang r de k^n. On applique en effet la propriété universelle aux morphismes de $Spec\, k$ dans $G(r,n)_k$. Un faisceau localement libre de rang $n-r$ sur $Spec\, k$ est un k-espace vectoriel V de rang $n-r$. Se donner n sections qui l'engendrent revient à se donner un morphisme surjectif

$$k^n \to V.$$

La donnée d'un tel morphisme est équivalente à la donnée du noyau

$$K \subset k^n$$

qui est de rang r.

Expliquons brièvement comment l'ensemble des k-sous-espaces vectoriels de rang r de k^n s'identifie à l'ensemble des k-points d'une variété algébrique projective lisse (et homogène, c'est-à-dire avec un groupe d'automorphismes transitif).

Soit $F \subset k^n$ de rang r. Soit $f_1, \ldots, f_r$ une base de F. Considérons le multivecteur

$$f_1 \wedge \ldots \wedge f_r \in \bigwedge^r k^n.$$

Il détermine F, car on a

$$F := \{f \in k^n,\ f \wedge f_1 \wedge \ldots, \wedge f_r = 0 \text{ dans } \bigwedge^{r+1} k^n\}.$$

Par ailleurs il est déterminé par F à un coefficient multiplicatif près, de sorte que F fournit un élément bien défini de $\mathbb{P}(\bigwedge^r k^n)$. En conclusion, les k-sous-espaces vectoriels de rang r de k^n sont en bijection avec les multivecteur réductibles de $\mathbb{P}(\bigwedge^r k^n)$. Il s'agit maintenant de voir que cette condition de réductibilité peut être décrite par des équations algébriques homogènes sur $\mathbb{P}(\bigwedge^r k^n)$.

Lemme 2.21 *Un élément $0 \neq \alpha \in \bigwedge^r k^n$ est réductible si et seulement si le noyau du produit extérieur par α*

$$\wedge\alpha : k^n \to \bigwedge^{r+1} k^n$$

est de dimension $\geq r$ (on a alors nécessairement l'égalité).

A montrer(exercice).

Ceci nous fournit les équations algébriques définissant la grassmannienne dans $\mathbb{P}(\bigwedge^r k^n)$. Chaque multivecteur α fournit une matrice de taille (n, C_n^{r+1}) décrivant le produit extérieur par α dans les bases naturelles de k^n et $\bigwedge^{r+1} k^n$. La réductibilité est caractérisée par le fait que cette matrice soit de rang $\leq n-r$ et donc par des équations homogènes données par les mineurs d'ordre $(n-r+1)$ de cette matrice.

Remarque 2.22 Ce plongement de la grassmannienne dans un espace projectif est appelé le plongement de Plücker.

Remarque 2.23 Ceci fournit des équations de degré $(n-r+1)$ pour la grassmannienne dans le plongement de Plücker. On peut montrer que l'idéal de la grassmannienne dans le plongement de Plücker est en fait engendré par des équations quadratiques.

Exercice 2.24 *Trouver des équations quadratiques pour la grassmannienne dans le plongement de Plücker.*

Exercice 2.25 *Construire le faisceau tautologique quotient $\mathcal{Q}$ de rang $n-r$ sur la grassmannienne $G(r,n)_k$. Montrer la propriété universelle satisfaite par la grassmannienne : pour tout faisceau localement libre $\mathcal{F}$ de rang $n-r$ engendré par n sections sur un k-schéma de type fini X, il existe un morphisme de k-schémas de type fini*

$$\phi : X \to G(r,n)_k$$

tel que $\phi^*\mathcal{Q} = \mathcal{F}$.

2.4 Faisceaux cohérents sur un schéma projectif.

Soit $Y = Proj\, A$ un k-schéma projectif, où A est une k-algèbre graduée de type fini engendrée en degré 1. Si M est un A-module gradué, on peut lui associer un faisceau $\mathcal{M}$ sur $Proj\, A$ défini de la façon suivante : Soient X_i des générateurs de degré 1 de A. Alors Y est couvert par les ouverts affines $Y_i = Spec\, A_{X_i,0}$ où l'indice 0 désigne la partie graduée de degré 0 du localisé. On a alors le module $M_i = M_{X_i,0}$ (partie de degré 0 du localisé M_{X_i}) qui est un $A_{X_i,0}$-module. Ceci détermine un faisceau $\widetilde{M_i}$ sur $Spec\, A_{X_i,0}$. Il est clair que $\widetilde{M_i}$ et $\widetilde{M_j}$ sont naturellement isomorphes sur l'intersection des ouverts $X_i \cap X_j$.

On peut aussi considérer pour chaque n le faisceau $\mathcal{M}(n)$ sur $Proj\, A$, obtenu en prenant sur chaque ouvert affine la partie de degré n des localisés M_{X_i}. Il est clair qu'on a par la définition de $\mathcal{O}(n)$,

$$\mathcal{M}(n) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}(n).$$

La correspondance $M \mapsto \mathcal{M}$ entre $k[X_0, \ldots, X_n]$-modules gradués et faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}^n_k$ n'est pas aussi parfaite que dans le cas affine. On a dans ce cas le résultat suivant :

Proposition 2.26 *Si $M = \oplus M_m$ est un module gradué de type fini sur $k[X_0, \ldots, X_n]$, alors pour $l >> 0$, on a*

$$M_l \cong H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M}(l)). \tag{3}$$

Inversement, si M et M' sont deux $k[X_0, \ldots, X_n]$-modules gradués tels qu'il existe un morphisme de $k[X_0, \ldots, X_n]$-modules gradués $f : M \to M'$ satisfaisant $f_n : M_n \cong M'_n$ pour $n >> 0$, alors f induit $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$.

Démonstration. L'isomorphisme 3 suffit à entraîner le second énoncé.

Notons que la flèche $M_n \to \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M}(n))$ est naturelle. Montrons d'abord l'injectivité : notons d'abord que si $\alpha \in M_l$ s'annule dans $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M}(l))$, alors α s'annule dans chaque localisé $M_{X_i,l}$ (la partie de degré l du localisé de M en X_i). Cela signifie que pour un entier N suffisamment grand, $X_i^N \alpha = 0$, $\forall i$, et finalement, pour un entier N' suffisamment grand $M_0^{N'} \alpha = 0$, où M_0 est l'idéal engendré par $X_0, \ldots, X_n$. Or l'ensemble des $\alpha \in M$ qui sont annulés par une puissance de M_0 est un sous-module de M qui est aussi de type fini (par la propriété noethérienne) sur $k[X_0, \ldots, X_n]$, et il en résulte qu'il est nul en degré l suffisamment grand. Donc $\alpha = 0$ pour $l >> 0$.

Pour la surjectivité, on utilise le corollaire 2.42, qui sera montré plus loin.

En effet, le module M est gradué de type fini sur $k[X_0, \ldots, X_n]$, et il existe donc des éléments $m_1, \ldots, m_r \in M$ de degré s engendrant M sur $k[X_0, \ldots, X_n]$. Ces éléments engendrent alors clairement le faisceau $\mathcal{M}$ en tout point. En d'autres termes, les m_i fournissent une application naturelle surjective :

$$\mathcal{O}^r \to \mathcal{M}(s).$$

D'après le corollaire 2.42, on a pour l suffisamment grand la surjectivité de l'application induite au niveau des sections globales.

$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(l))^r \twoheadrightarrow H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M}(s+l)).$$

Mais d'après le théorème 2.19, on a $H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(l)) = k[X_0, \ldots, X_n]_l$, et donc la flèche ci-dessus se factorise via

$$k[X_0, \ldots, X_n]_l^r \to M(l+s),$$
$$(a_1, \ldots, a_r) \mapsto \sum_i a_i m_i,$$

et via l'application naturelle $M(l+s) \to H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M}(s+l))$. On conclut que cette dernière flèche est surjective. ■

Pour finir, notons le résultat suivant, qui généralise le théorème 2.4 au cas projectif.

Théorème 2.27 *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathcal{P}^n_k$. Alors le $k[X_0, \ldots, X_n]$-module gradué $M := \oplus_{l \geq 0} H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(l))$ est de type fini, et on a $\mathcal{F} \cong \mathcal{M}$.*

Démonstration. On utilise le théorème 2.43 qui sera montré plus loin, et dit qu'il existe pour l assez grand un nombre fini de sections $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ de $\mathcal{F}(l)$ engendrant $\mathcal{F}$ en tout point.

L'application d'évaluation

$$W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{F}(l),$$

où W est le k-espace vectoriel engendré par les σ_i, est alors un morphisme surjectif de faisceaux cohérents. D'après le corollaire 2.42 montré dans le chapitre suivant, l'application induite au niveau des sections globales :

$$W \otimes H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(m)) \to H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(m+l))$$

est surjective pour $m \geq m_0$. Par ailleurs, pour $m \leq m_0 + l$, le théorème 2.46 nous dit que $H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(m))$ est un k-espace vectoriel de rang fini.

On obtient donc un nombre fini de générateurs de M en prenant des générateurs sur k de $H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(m))$ pour $0 \leq m \leq m_0 + l$.

La preuve du fait que $\mathcal{M} \cong \mathcal{F}$ se conclut à l'aide du lemme 2.45 et du théorème 2.4 appliqué à chaque ouvert standard U_i.

■

2.5 Cohomologie des faisceaux quasi-cohérents

La catégorie des faisceaux quasi-cohérents (resp. cohérents) sur un k-schéma de type fini X est une catégorie abélienne (pour le cas cohérent, cela nécessite la propriété noethérienne des k-algèbres de type fini). Ici les morphismes de faisceaux quasi-cohérents $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sont définis comme les morphismes de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$. En fait ces morphismes sont donnés par des morphismes de A-modules sur les ouverts affines $Spec\, A$ de X, comme il résulte du théorème 2.4, ce qui garantit bien que la catégorie est abélienne.

On a un foncteur $\Gamma(X, \cdot)$ de sections globales, qui envoie un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur un A-module (resp. A-module de type fini), où $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Lorsque X est affine, le théorème 2.4 et la remarque qui le suit montrent que c'est une équivalence de catégories. On va s'intéresser au foncteur des sections globales à valeurs dans la catégorie abélienne des k-espaces vectoriels. Ce foncteur est exact à gauche. Pour définir des foncteurs dérivés $R^i\Gamma$, on va plus généralement considérer la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules.

Pour montrer que ce foncteur admet des foncteurs dérivés, il suffit de savoir que la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules sur un espace annelé X admet suffisamment d'injectifs.

Pour voir cela, on plonge tout faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{F}$ dans un injectif de la manière suivante : on prend le plongement de Godement de $\mathcal{F}$ dans le faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{F}_{god}$ défini par

$$\mathcal{F}_{god}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x,$$

où le faisceau $\mathcal{F}_x$ est supporté au point x. (Si i_x est l'inclusion de x dans X, $\mathcal{F}_x = i_{x*}(i_x^{-1}(\mathcal{F}))$.

Ensuite on plonge chaque $\mathcal{F}_x$ dans un $\mathcal{O}_{X,x}$-module injectif $\mathcal{G}_x$. Le faisceau $\widetilde{\mathcal{G}}$ défini par $\widetilde{\mathcal{G}}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{G}_x$ est alors un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules qui contient $\mathcal{F}$. Il reste à montrer :

Lemme 2.28 *Le faisceau $\widetilde{\mathcal{G}}$ est injectif comme faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules.*

Démonstration. Comme le faisceau $\widetilde{\mathcal{G}}$ est le produit direct des $\mathcal{G}_x$, il suffit de montrer que chaque $\mathcal{G}_x$ est injectif comme faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules.

Soit $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ un morphisme injectif de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules, et soit $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}_x$ un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules. On doit l'étendre en un morphisme f' de $\mathcal{H}'$ dans $\mathcal{G}_x$. Mais comme $\mathcal{G}_x$ est supporté au point x, ϕ se factorise à travers l'application naturelle $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_x$ (de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules, où le terme de droite est supporté au point x), et le germe $\phi_x : \mathcal{H}_x \to \mathcal{G}_x$.

Le germe $f_x : \mathcal{H}_x \to \mathcal{H}'_x$ est un morphisme injectif de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules et donc $\phi_x : \mathcal{H}_x \to \mathcal{G}_x$ s'étend par l'injectivité de $\mathcal{G}_x$ en $f'_x : \mathcal{H}'_x \to \mathcal{G}_x$. On définit f' comme le composé de l'application naturelle $\mathcal{H}' \to \mathcal{H}'_x$ et de f'_x, $\mathcal{H}'_x \to \mathcal{G}_x$.

■

Le théorème d'annulation de Serre pour les schémas affines est le suivant :

Théorème 2.29 *(Serre) Soit X un k-schéma affine de type fini. Alors pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur X, on a*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0,\ i > 0.$$

On utilise pour cela :

Lemme 2.30 *Si $X = Spec\, A$ et I est un A-module injectif, alors le faisceau associé $\widetilde{I}$ sur X est flasque.*

Démonstration. On veut montrer que si U est un ouvert de $X = Spec\, A$, et σ une section de $\widetilde{I}$ sur U, σ s'étend à X.

Supposons d'abord que U est lui-même affine : $U = Spec\, A_f$. On sait que $\widetilde{I}(U) = I_f$, et on veut donc montrer que $I \to I_f$ est surjective. Pour chaque $l \geq 0$, soit

$$\mathcal{G}_l \subset A$$

l'idéal annulateur de f^l. Les idéaux $\mathcal{G}_l$ sont croissants et donc stationnaires par la propriété noethérienne. On a donc $\mathcal{G}_l = \mathcal{G}_{l+1}$ pour un certain $l > 0$. Il en résulte que la multiplication par f de $A/\mathcal{G}_l$ dans $A/\mathcal{G}_l$ est injective.

Soit $x \in I$. On va d'abord montrer que $f^l x = f^{l+1} y$ pour un $y \in I$. Pour cela, considérons le morphisme

$$\nu : A/\mathcal{G}_l \to I$$

donné par $a \mapsto f^l a x$. Par la propriété d'injectivité de I, il existe $\mu' : A/\mathcal{G}_l \to I$ telle que $\mu'(fa) = f\mu'(a) = \mu(a)$. Soit $y = \mu'(1)$. On a $\mu(1) = fy$. Il reste à montrer que $y \in f^l I$. Or on a l'inclusion donnée par la multiplication par $f^l : A/\mathcal{G}_l \to A$. La propriété d'injectivité de I entraîne que μ' s'étend à A, c'est-à-dire qu'il existe $\mu'' : A \to I$ telle que $\mu'(a) = \mu''(f^l a)$. Il vient donc

$$y = \mu'(1) = f^l \mu''(1).$$

Ceci entraîne immédiatement que $I \to I_f$ est surjectif, puisque si on considère $J = f^k I \subset I$, il est clair que $J_f \cong I_f$. Or la multiplication par f :$J \to J$ est surjective, et donc $J \to J_f$ est surjectif.

Regardons maintenant ce qui se passe dans le cas d'une section sur une union de deux ouverts affines

$$U = Spec\, A_f,\ V = Spec\, A_g.$$

On a donc deux éléments $x_f \in I_f$ et $y_g \in I_g$ qui deviennent égaux dans $I_{f,g}$. On sait que x_f et y_g se relèvent dans I, et on note x et y des relèvements. Le problème est que x peut être différent de y. Cependant x peut être modifié par un élément annulé par une puissance de f, et de même y peut être modifié par un élément annulé par une puissance de g. Or on sait que $x - y$ s'annule dans $I_{f,g}$, ce qui implique que pour un certain entier k, on a $f^k g^k (x - y) = 0$ dans I.

Il faut alors utiliser le fait que ${}_{f^k}I := Ker\, f^k : I \to I$ est un A/f^k module injectif. Or on a $f^k(x-y) = 0$ dans I_g, c'est-à-dire que le localisé $(x-y)_g \in I_g$ appartient en fait à ${}_{f^k}I_g$. On applique alors le résultat précédent au A/f^k-module injectif ${}_{f^k}I$, pour déduire qu'il existe un $z \in {}_{f^k}I$ tel que $z = (x-y)_g$ dans ${}_{f^k}I_g$. Alors on remplace x par $x' = x - z$. Le localisé de x' dans I_f est égal à x_f, et $x' - y$ s'annule dans I_g. On applique le même raisonnement pour modifier y en y', de façon que $x' = y'$ et $y'_g = y_g$.

On renvoie à [6] pour le cas d'un ouvert arbitraire. Comme le montre l'argument donné ci-dessus, où l'on a fait intervenir l'injectivité de ${}_{f^k}I$ comme A/f^kA-module, il faut faire un argument de récurrence sur la dimension.

■

Démonstration du Théorème 2.29. Un A-module M admet une résolution par des A-modules injectifs I^l. Tout faisceau quasi-cohérent étant d'après le théorème 2.4 le faisceau $\widetilde{M}$ associé à un A-module M, et le foncteur $M \mapsto \widetilde{M}$ étant exact, $\widetilde{M}$ admet une résolution par les faisceaux $\widetilde{I^l}$. Ces faisceaux sont flasques par le théorème 2.30 et donc acycliques d'après [12], Proposition 4.34. On a donc d'après [12], Proposition 4.32,

$$H^l(X, \mathcal{F}) = H^l(\Gamma(X, \widetilde{I^{\cdot}})).$$

Or on sait d'après la proposition 2.1 que $\Gamma(X, \widetilde{I^{\cdot}}) = I^{\cdot}$, et le complexe $I^{\cdot}$ est exact en degré > 0.

■

Une première conséquence du théorème 2.29 est la suivante :

Proposition 2.31 *Pour tout k-schéma quasi-projectif de type fini Y, muni d'un recouvrement (qu'on peut supposer fini) par des ouverts Y_i, $i = 1, \ldots, N$, tels que les intersections d'un nombre arbitraire de Y_i soient encore affines, on peut calculer la cohomologie de n'importe quel faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur Y comme la cohomologie de Čech de $\mathcal{F}$ associé au recouvrement $Y.$, c'est-à-dire la cohomologie du complexe*

$$\mathcal{C}^l(\mathcal{F}) := \oplus_{I \subset \{1,\ldots,N\}, |I| = l+1} \Gamma(Y_I, \mathcal{F}),\ Y_I := \cap_{i \in I} Y_i,$$

muni de la différentielle de Čech.

Démonstration. D'après le théorème 2.29, les faisceaux $\mathcal{F}$ cohérents sont acycliques sur une intersection arbitraire de ces ouverts. On conclut alors par [12], théorème 4.41. ■

Corollaire 2.32 *Pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur un schéma projectif X de dimension n, on a $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $i > n$.*

Démonstration. En effet, on peut trouver alors un recouvrement de X par $n+1$ ouverts affines tels qu'une intersection arbitraire de ces ouverts soit affine. Cela résulte immédiatement de la version projective du lemme de normalisation d'Emmy Noether 1.32, qui montre que X admet un morphisme affine (et en fait fini) à valeurs dans $\mathbb{P}^n$. ■

Exercice 2.33 *Etendre ce résultat aux schémas quasi-projectifs, avec la même démonstration, i.e. montrer qu'un schéma quasi-projectif de dimension n peut être couvert par $n+1$ ouverts affines.*

Une autre conséquence intéressante de la proposition 2.31 est le corollaire suivant :

Corollaire 2.34 *Soit X un schéma quasi-projectif de type fini sur k et soit $k \subset K$ une inclusion de corps. Alors pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, avec extension $\mathcal{F}_K$ sur X_K, et pour tout entier i on a :*

$$H^i(X_K, \mathcal{F}_K) = H^i(X, \mathcal{F}) \otimes_k K.$$

Démonstration. En effet, on calcule le groupe de cohomologie $H^i(X, \mathcal{F})$ comme le groupe de cohomologie du complexe de Čech de $\mathcal{F}$ associé à un recouvrement affine $X_\cdot$ de X. Un tel recouvrement induit par extension des scalaires un recouvrement affine $X_{K,\cdot}$ de X_K, et le complexe de Čech de $\mathcal{F}_K$ associé au recouvrement affine $X_{K,\cdot}$ n'est autre que le complexe de Čech de $\mathcal{F}$ tensorisé par K au-dessus de k (par définition de $\mathcal{F}_K$). Comme le foncteur $\otimes_k K$ est exact, le résultat en découle. ■

Un autre résultat intéressant est le fait suivant :

Corollaire 2.35 *Si X est un k-schéma quasi-projectif, et $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent sur X, les $H^i(X, \mathcal{F})$ sont aussi les foncteurs dérivés $R^i\Gamma$ du foncteur Γ, de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens (ou de k-espaces vectoriels) dans la catégorie des groupes abéliens (ou des k-espaces vectoriels).*

Démonstration. En effet, on sait qu'on peut calculer le groupe de cohomologie $H^i(X, \mathcal{F})$ comme le groupe de cohomologie du complexe de Čech de $\mathcal{F}$ associé à un recouvrement affine $X_\cdot$ de X. Or sur chaque ouvert affine intersection d'ouverts de ce recouvrement, on sait par le lemme 2.30 que la restriction de $\mathcal{F}$ est flasque, donc acyclique pour le foncteur Γ défini sur la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X. Donc la cohomologie du complexe de Čech de $\mathcal{F}$ associé à un recouvrement affine $X_\cdot$ de X calcule aussi $R^i\Gamma(X, \mathcal{F})$. ■

2.6 Cohomologie de l'espace projectif

On va calculer la cohomologie $H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(l))$ pour tout l et i.

Théorème 2.36 *On a $H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(l)) = 0$ pour tout l et tout i tel que $0 < i < n$. On a aussi $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(l)) = 0$ pour $n > 0$, $l \geq 0$.*

Démonstration. Par récurrence sur la dimension n. Soit $H = \mathbb{P}^{n-1}_k$ l'hyperplan défini par $X = 0$, où $X = \sum_i \alpha_i X_i$, $\alpha_i \neq 0$. On a déjà noté que $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(H)$, ce qui équivaut à $\mathcal{O}(-1) = \mathcal{I}_H$, le faisceau d'idéaux définissant H. On a donc la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l) \xrightarrow{X} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l+1) \to \mathcal{O}_H(l+1) \to 0. \tag{4}$$

Rappelons d'abord le théorème 2.19 :

Pour $l \geq 0$, $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l))$ est la partie graduée de degré l de $k[X_0, \ldots, X_n]$. Pour $l < 0$, $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l))$ vaut 0 sauf si $n = 0$.

Ceci entraîne en particulier que l'application de restriction

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l+1)) \to H^0(\mathcal{O}_H(l+1))$$

est surjective pour tout l, si $n-1>0$.

Revenant à notre démonstration, comme on s'intéresse au domaine $0<i<n$, on a $n-1>0$. Alors on obtient, par la suite exacte longue de cohomologie associée à (4) et l'hypothèse de récurrence : L'application

$$X : H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l)) \to H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l+1))$$

est injective pour $0<i<n$ et pour tout l. La preuve de l'annulation de $H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l))$ se conclut alors par le lemme suivant 2.37. ∎

Lemme 2.37 *Pour toute classe $\alpha \in H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l))$, $i>0$, et pour r suffisamment grand (dépendant de α) on a $X^r\alpha = 0$ dans $H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l+r))$.*

Démonstration. On va appliquer le théorème d'annulation 2.29 pour la cohomologie des faisceaux cohérents sur l'ouvert affine U défini par $X \neq 0$, et la proposition 2.31. Ainsi, une classe de cohomologie $\alpha \in H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l))$, $i>0$ s'écrit comme la classe de cohomologie d'un cocycle de Čech $\tilde{\alpha}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l)$ associé au recouvrement de $\mathbb{P}^n_k$ par les ouverts standards. La restriction de cette classe de cohomologie à U est triviale, et donc s'écrit $\tilde{\alpha} = \delta\beta$ sur U. Mais la cochaîne de Čech $\beta = (\beta_I)$ qui est définie sur les intersections $U_I \cap U$ a la propriété que pour r suffisamment grand, chaque $X^r\beta_I$ s'étend à U_I. Alors $X^r\beta$ est étendue en une cochaîne de Čech $\tilde{\beta}$ sur $\mathbb{P}^n_k$ qui satisfait

$$\delta\tilde{\beta} = X^r\alpha.$$

∎

Calcul de $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(i))$. On a le résultat suivant :

Théorème 2.38 *On a $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(i)) = 0$ pour $i \geq -n$.*

De plus $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(-n-1)) = k$ (non canoniquement) et plus généralement $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(-n-1-i))$ est isomorphe à $H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(i))^*$ (le dual comme k-espace vectoriel).

Remarque 2.39 La dualité ci-dessus est donnée par l'accouplement

$$H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(-n-1-i)) \times H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(i)) \to H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(-n-1)) \cong k.$$

Elle est donc naturelle, mais dépend du choix de l'isomorphisme $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(-n-1)) \cong k$.

Démonstration du théorème 2.38. On utilise le recouvrement de $\mathbb{P}^n_k$ par $n+1$ ouverts affines U_i dont les intersections arbitraires sont affines. Il résulte du corollaire 2.31 que l'on peut calculer $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(l))$ comme le quotient de l'espace des sections de $\mathcal{O}(i)$ sur l'ouvert $U_0 \cap \ldots \cap U_n$ par le sous-espace constitué des sections qui s'étendent sur l'un des $U_0 \cap \ldots \widehat{U}_i \ldots \cap U_n$.

Une section de $\mathcal{O}(l)$ définie sur $U_0 \cap \ldots \cap U_n$ s'écrit comme une fraction rationnelle P/Q, avec $deg\, P - deg\, Q = l$, où les P et Q sont des polynômes homogènes en les

X_i, Q étant en fait un monôme en les X_i. Une telle fraction s'écrit aussi comme une somme de termes P_i/Q_i où P_i et Q_i sont des monômes en les variables $X_0, \ldots, X_n$, premiers entre eux, et tels que $deg\, P_i - deg\, Q_i = l$. Un quotient P_i/Q_i où P_i et Q_i sont premiers entre eux s'étend sur un ouvert $U_0 \cap \ldots \widehat{U_j} \ldots \cap U_n$ si et seulement si X_j n'apparaît pas dans Q_i. Donc P_i/Q_i est nul en cohomologie si $X_0 \ldots X_n$ ne divise pas Q_i. Mais d'autre part, si $X_0 \ldots X_n$ divise Q_i, comme P_i et Q_i sont premiers entre eux, et P_i est un monôme, P_i doit être un scalaire.

En conclusion, la cohomologie $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(l))$ admet une base sur k constituée des $\frac{1}{X_0^{i_0} \ldots X_n^{i_n}}$, avec $i_0 > 0, \ldots, i_n > 0$ et $-l = \sum_s i_s$. On en déduit qu'elle est nulle pour $l > -n-1$, et qu'elle vaut k pour $l = -n-1$. Ici on a un générateur $\frac{1}{X_0 \ldots X_n}$ de $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(-n-1))$, mais il n'est en fait pas canonique, car il dépend des coordonnées homogènes choisies sur $\mathbb{P}^n_k$. On reviendra plus loin sur ce point dans la section 9. L'énoncé de dualité résulte du théorème 2.19 et du calcul ci-dessus, qui donne une base explicite de $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(l))$. ■

2.7 Théorèmes d'annulation

On suppose ici que $X \subset \mathbb{P}^n_k$ est projectif. On a alors :

Théorème 2.40 *(Serre) Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, il existe n_0 tel que $H^i(X, \mathcal{F}(l)) = 0$, $\forall l \geq n_0$, $\forall i > 0$.*

Remarque 2.41 L'hypothèse "cohérent" par opposition à quasi-cohérent est évidemment cruciale ici.

Corollaire 2.42 *Soit $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ un morphisme surjectif entre deux faisceaux cohérents sur X. Alors pour l suffisamment grand, cette application induit une application surjective*

$$H^0(X, \mathcal{F}(l)) \to H^0(X, \mathcal{G}(l)).$$

Démonstration. En effet le noyau $\mathcal{H}$ de cette application est un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}^n_k$ et on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{H} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie associée et le fait que $H^1(X, \mathcal{H}(l)) = 0$ pour l suffisamment grand permettent de conclure. ■

Le théorème sera obtenu comme une conséquence du résultat suivant :

Théorème 2.43 *(Serre) Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $X \subset \mathbb{P}^n_k$, il existe l tel que $\mathcal{F}(l)$ est engendré par ses sections globales.*

Remarque 2.44 Il suffit en fait de regarder $X = \mathbb{P}^n_k$, car

$$H^i(X, \mathcal{F}(l)) = H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(l)),$$

où dans le terme de droite, on note encore $\mathcal{F} = j_*\mathcal{F}$, où j est l'inclusion de X dans $\mathbb{P}^n_k$.

Ceci est en effet une conséquence du corollaire 2.35, qui dit que les $H^i(X, .)$ sont aussi les foncteurs dérivés du foncteur $\Gamma(X, .)$ dans la catégorie des faisceaux de k-espaces vectoriels.

Démonstration du théorème 2.43. On sait que $\mathcal{F}_{|U_i}$ est engendré par ses sections globales sur chaque ouvert affine U_i défini par $X_i \neq 0$ (théorème 2.4). On va montrer tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.45 *Si σ est une section globale de $\mathcal{F}$ sur U_i, alors $X_i^l\sigma$ s'étend en une section globale de $\mathcal{F}(l)$ sur $\mathbb{P}_k^n$, pour l assez grand.*

Démonstration. Pour cela on regarde $\sigma_{|U_j \cap U_i}$. C'est une section de $\mathcal{F}$ sur $U_i \cap U_j$. Comme $U_i \cap U_j \subset U_j$ est l'ouvert affine défini par $X_i/X_j \neq 0$, on sait que $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F}_{|U_i \cap U_j})$ est le localisé de $\Gamma(U_j, \mathcal{F}_{|U_j})$ le long de X_i/X_j. Donc pour un certain l qu'on peut supposer indépendant de j, $(X_i/X_j)^l \sigma_{|U_i \cap U_j}$ s'étend en une section de $\mathcal{F}$ sur U_j, ou encore $X_i^l \sigma_{|U_i \cap U_j}$ s'étend en une section de $\mathcal{F}(l)$ sur U_j. On a donc obtenu des sections α_j de $\mathcal{F}(l)$ sur U_j qui ont la propriété que leur restriction à $U_i \cap U_j$ vaut $X_i^l \sigma_{|U_i \cap U_j}$. Donc $\alpha_j - \alpha_{j'}$ s'annule sur $U_i \cap U_j \cap U_{j'}$ et on conclut par un argument semblable au précédent que $X_i^m(\alpha_j - \alpha_{j'}) = 0$ pour m assez grand, et pour tous j, j'. Alors les $X_i^m \alpha_j$ forment une section globale de $\mathcal{F}(l+m)$ sur $\mathbb{P}_k^n$, dont la restriction à U_i vaut $X_i^m \sigma$. ∎

Pour conclure la preuve du théorème 2.43, on note que par compacité, il existe un nombre fini de sections σ_t engendrant $\mathcal{F}$ sur U_i. Les sections $X_i^m \sigma_t$ s'étendent pour m assez grand sur $\mathbb{P}_k^n$ et engendrent $\mathcal{F}(m)$ sur U_i. Procédant de même pour chaque i, on trouve finalement un nombre fini de sections de $\mathcal{F}(m)$ pour m assez grand, engendrant $\mathcal{F}(m)$ sur $\mathbb{P}_k^n$.

∎

Démonstration du théorème 2.40. A l'aide du théorème 2.43, on conclut que tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}_k^n$ admet une résolution à gauche comme faisceau de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}$-modules :

$$\ldots \to \mathcal{G}_i \to \mathcal{G}_{i-1} \to \ldots \to \mathcal{G}_0 \to \mathcal{F} \to 0, \tag{5}$$

où les $\mathcal{G}_i$ sont de la forme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{r_i}(-n_i)$ avec n_i suffisamment grand.

Soit maintenant $m \geq sup\{n_i, i \leq n\}$; regardons la résolution (5) tordue par $\mathcal{O}(m)$. Les faisceaux

$$\mathcal{G}_i(m) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{r_i}(-n_i + m),\, n_i + m \geq 0$$

sont acycliques pour $i \leq n$ d'après le théorème 2.36.

Scindons la résolution (5) tensorisée par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m)$ en suites exactes courtes : on pose pour cela $Z_i = Ker(\mathcal{G}_i(m) \to \mathcal{G}_{i-1}(m))$ pour $i \geq 0$, avec $\mathcal{G}_{-1}(m) := \mathcal{F}(m)$. On a donc par l'exactitude de (5) des suites exactes

$$0 \to Z_i \to \mathcal{G}_i(m) \to Z_{i-1} \to 0,$$

où l'on pose $Z_{-1} := \mathcal{F}(m)$.

Pour $s > 0$, l'acyclicité des faisceaux $\mathcal{G}_i(m)$ pour $i \leq n$ et les suites exactes longues associées aux suites exactes courtes ci-dessus vont fournir :

$$H^s(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}(m)) = H^s(\mathbb{P}_k^n, Z_{-1}) = H^{s+1}(\mathbb{P}_k^n, Z_0) = \ldots = H^{s+n}(\mathbb{P}_k^n, Z_{n-1}).$$

Mais par le corollaire 2.32, on a $H^{s+n}(\mathbb{P}_k^n, Z_{n-1}) = 0$ car $s + n > n = dim\, \mathbb{P}_k^n$. ∎

Notons enfin le résultat de finitude suivant :

Théorème 2.46 *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ un k-schéma projectif et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors tous les espaces $H^i(X, \mathcal{F})$ sont des k-espaces vectoriels de rang fini.*

Démonstration. Par le même argument que précédemment, on se ramène au cas où $\mathcal{F}$ est un faisceau $\mathcal{O}(l)$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$. Cela résulte alors des théorèmes 2.36, 2.38 et 2.19. ■

3 Etude des sous-schémas

On a déjà vu la définition des sous-schémas affines. Un schéma affine $X = Spec\, A$ étant donné, un sous-schéma fermé de X est un fermé de Zariski $i : Y \hookrightarrow X$ déterminé par un idéal $I \subset A$, et muni du faisceau structurel $\mathcal{O}_Y = i^{-1}\mathcal{O}_X / i^{-1}\widetilde{I}$.

Plus généralement, on peut définir un sous-schéma fermé d'un k-schéma de type fini comme l'image par une immersion fermée et injective d'un morphisme de schémas $\phi : Y \hookrightarrow X$, où le terme "immersion" a ici la signification suivante : au morphisme d'espaces annelés ϕ correspond un morphisme de pull-back :

$$\phi^* : \phi^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y,$$

dont on demande qu'il soit un morphisme surjectif de faisceaux d'anneaux sur Y.

Définition 3.1 *Le faisceau*

$$\mathcal{I}_Y := Ker\,(\mathcal{O}_X \to \phi_*\mathcal{O}_Y)$$

est appelé le faisceau d'idéaux de Y.

Proposition 3.2 *Le faisceau $\mathcal{I}_Y$ est cohérent sur X. Inversement, tout sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$ définit un sous-schéma fermé de X.*

Démonstration. Par définition d'un morphisme de schémas, pour tout ouvert affine $U = Spec\, A$ de X, la restriction à U du faisceau $\mathcal{I}_Y$, qui est le faisceau d'idéaux de $Y \cap U$ est bien de la forme $\widetilde{I}$, où $I := Ker\, A \to B$, $B = \Gamma(Y \cap U, \mathcal{O}_{Y \cap U})$. Cela montre que $\mathcal{I}_Y$ est quasi-cohérent. Mais comme X est de type fini, l'algèbre A est une k-algèbre de type fini, donc noethérienne, et il en résulte que I est un A-module de type fini, de sorte que $\mathcal{I}_Y$ est cohérent.

Inversement, si $\mathcal{I}$ est un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$, par le théorème 2.4, sur tout ouvert affine $U = Spec\, A$ de X, on a $\mathcal{I} = \widetilde{I}$ pour un idéal $I \subset A$. On définit alors $Y \cap U$ comme le sous-schéma de U défini par I et on vérifie les recollements. ■

3.1 Composantes irréductibles

La décomposition schématique d'un k-schéma de type fini X en composantes irréductibles se fait localement. Dans chaque ouvert affine $U = Spec\, A$ de X, on considère les idéaux premiers "associés" de A, c'est-à-dire les idéaux premiers qui sont des idéaux annulateurs $\mu = Ann\, x$, pour un élément $0 \neq x \in A$. Ces idéaux associés sont en nombre fini (grâce à la propriété noetherienne). Les idéaux premiers minimaux de A sont des idéaux associés mais la réciproque n'est pas vraie. Tout diviseur de 0 dans A appartient à au moins un idéal associé (cf [7], chapitre 3).

Les idéaux associés de A définissent des sous-schémas affines irréductibles réduits de $Spec\,A$, dont les adhérences dans X sont par définition les composantes irréductibles de X. Les idéaux associés non minimaux définissent les composantes dites immergées (elles sont contenues dans des composantes irréductibles de plus grande dimension).

Exemple 3.3 Considérons l'idéal I de $k[X,Y]$ engendré par X^2Y et XY^2. Il définit un sous-schéma $Z = Spec\,k[X,Y]/I$ de A^2_k. L'annulateur de XY dans $k[X,Y]/I$ est l'idéal engendré par X et Y. Par ailleurs l'annulateur de X^2 est engendré par Y et l'annulateur de Y^2 est engendré par X. Les idéaux $< X >, < Y >, < X, Y >$ sont les idéaux associés de Z, dont le troisième définit une composante immergée.

3.2 Multiplicités

Soit X un k-schéma, et soit $Y \subset X$ une composante irréductible non immergée de X. Étant irréductible, Y a un unique point générique $\mu \in X$. Considérons un voisinage affine ouvert $U = Spec\,A$ de μ contenant μ. Alors, comme Y est une composante non immergée, μ est un idéal premier minimal de A, et l'anneau local A_μ est artinien local de corps résiduel $k_\mu = A_\mu/\mu A_\mu$. En effet A_μ est noetherien et tout idéal premier de A_μ est maximal. Un anneau artinien local A_μ possède une longueur $l(A_\mu)$ définie comme la longueur de toute filtration $F^\cdot$ de A_μ par des A_μ-sous-modules, dont les gradués $Gr^\cdot_F$ sont tous isomorphes à k_μ. Cette longueur est la multiplicité de X le long de la composante Y.

Cycles. Cette notion de multiplicité permet de définir le cycle associé à un schéma de type fini. C'est une notion importante en théorie de l'intersection et des cycles algébriques (cf [5]).

Définition 3.4 *Soit Z un k-schéma de type fini de dimension d. Alors le cycle de Z est la somme formelle :*

$$\sum_i n_i Z_i,$$

où Z_i parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de dimension d de Z et n_i est la multiplicité de Z le long de Z_i.

Lorsque Z est un sous-schéma d'une variété fixée X, le cycle de Z est à voir comme un élément du groupe des cycles $\mathcal{Z}_d(X)$, défini comme le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas réduits irréductibles de dimension d de X.

3.3 Complétion formelle

Soit A un anneau, et I un idéal de A. On peut alors considérer le complété formel de A le long de I :

$$\widehat{A} := \lim_{\leftarrow} A/I^l.$$

Si M est un A-module, on peut définir de même

$$\widehat{M} := \lim_{\leftarrow} M/I^l M,$$

qui est un $\widehat{A}$-module.

Exemple 3.5 Le complété formel de $k[X_1, \ldots, X_n]$ le long de l'idéal $< X_1, \ldots, X_n >$ est l'anneau de séries entières $k[[X_1, \ldots, X_n]]$.

L'étude des complétés dans le cas où l'anneau A est noetherien est facilitée par le lemme d'Artin-Rees :

Lemme 3.6 *Soit A un anneau noetherien, I un idéal de A et M un A-module de type fini sur A. Soit $L \subset M$ un sous A-module. Alors il existe un entier s tel que pour tout $k \geq 0$ on ait :*

$$I^k M \cap L \subset I^{k-s} L. \tag{6}$$

Démonstration. Soient $a_1, \ldots, a_r$ des générateurs de I. Alors on peut considérer $M' := \oplus_k I^k M$ comme un $A[t_1, \ldots, t_r]$-module, où la multiplication par $t_i : I^k M \to I^{k+1} M$ est définie comme étant la multiplication par a_i. Il est clair que des générateurs de M comme A-module sont aussi des générateurs de $\oplus_k I^k M$ comme $A[t_1, \ldots, t_r]$-module. Donc M' est de type fini sur $A[t_1, \ldots, t_r]$. M' contient le sous-A'-module $L' := \oplus_k I^k M \cap L$.

Comme A' est noetherien , L' est de type fini sur A'. Soient $l_1, \ldots, l_t$ des générateurs de L' comme A'-module, et soit s le degré maximal d'un des l_t, (i.e $l_i \in \oplus_{k \leq s} I^k M \cap L, \forall i$).

Pour ce s, (6) est satisfait. ∎

Corollaire 3.7 *Si A est local noetherien, et $I \neq A$ est contenu dans l'idéal maximal, on a une inclusion $A \subset \widehat{A}$.*

Démonstration. Soit $K \subset A$ le noyau de $A \to \widehat{A}$. Alors on a $K \subset I^k, \forall k \geq 0$. Par le lemme d'Artin-Rees, on trouve donc que pour un certain $k > 0$, $K = I^k K$. On conclut par Nakayama que $K = 0$. ∎

Corollaire 3.8 *Soit A noetherien. Soit I un idéal de A et soit*

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

une suite exacte de A-modules, avec M de type fini. Alors on a la suite exacte des complétés par rapport à I.

$$0 \to \widehat{L} \to \widehat{M} \to \widehat{N} \to 0.$$

Démonstration. La surjectivité à droite est facile. L'injectivité à gauche est une conséquence d'Artin-Rees : en effet, soit $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $l_k \in L/I^k L$ une suite avec

$$l_{k-1} = l_k \ mod. \ I^{k-1} L. \tag{7}$$

Supposons que cet élément de $\widehat{L}$ s'annule dans $\widehat{M}$. Alors l_k s'annule dans $M/I^k M$. D'après le lemme 3.6, on déduit qu'il existe s tel que $l_k \in I^{k-s} L / I^k L$ pour tout k.

Mais alors d'après (7), on a $l_k = 0, \forall k$. L'exactitude au milieu se montre de même.

∎

Les anneaux A, $\widehat{A}$ possèdent l'idéal I, respectivement

$$\widehat{I} = \lim_{\leftarrow} A/I^l,$$

et donc les filtrations décroissantes correspondantes

$$F^l A = I^l,\ F^l \widehat{A} = \widehat{I}^l.$$

On peut remarquer qu'on a

$$A/F^l A = \widehat{A}/F^l \widehat{A},$$
$$Gr^l_F A = I^l/I^{l+1} \cong Gr^l_F \widehat{A}.$$

Notons que l'anneau $\oplus_{l\geq 0} I^l/I^{l+1}$ est une A/I-algèbre graduée.

Ces définitions peuvent s'étendre par recollement aux sous-schémas. Si $Y \subset X$ est un sous-schéma fermé, on définira le complété formel de Y dans X, et on le notera $\widehat{X}_Y$, comme l'espace annelé d'espace topologique sous-jacent Y et de faisceau d'anneaux

$$\mathcal{O}_{\widehat{X}_Y}(Y \cap U) := \widehat{A},$$

où $U = Spec\, A$, $Y \cap U = Spec\, A/I \subset Spec\, A$ et où la complétion est relative à I. La compatibilité des complétions formelles avec les localisations entraîne la cohérence de cette définition. Les germes de $\mathcal{O}_{\widehat{X}_Y}$ sont les complétés formels des germes de $\mathcal{O}_X$ relativement aux germes du faisceau d'idéaux définissant Y.

Si enfin $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X, on a un faisceau cohérent $\widehat{\mathcal{F}}$ induit sur $\widehat{X}_Y$: c'est le faisceau de $\mathcal{O}_{\widehat{X}_Y}$-modules défini sur les ouverts affines de X par

$$\widehat{\mathcal{F}}(Y \cap U) = \widehat{\mathcal{F}(U)},$$

où $U = Spec\, A$, $Y \cap U = Spec\, A/I \subset Spec\, A$ et où la complétion est relative à I.

Ces notions sont très utiles pour pallier la rigidité de la géométrie algébrique.

Exemple 3.9 Soit $f(X, Y)$ une équation polynomiale à deux variables à coefficients complexes telle que

$$f(x, y) = xy + g(x, y)$$

où g est un polynôme homogène générique de degré 3.

On peut montrer que f est irréductible, c'est-à-dire que l'anneau

$$\mathbb{C}[x, y]/f$$

est intègre.

Cependant son complété en 0 n'est pas irréductible. Il est isomorphe à

$$\mathbb{C}[[x, y]]/(xy),$$

correspondant à l'intuition géométrique que la courbe définie par $f = 0$ a deux branches locales en 0.

On peut aussi considérer le schéma au-dessus de Y défini localement comme le spectre du faisceau d'anneaux $Gr_F \mathcal{O}_X$, où F est la filtration définie par $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$.

Ceci est appelé le cône normal de Y dans X. C'est une notion très utile dans la théorie de l'intersection (cf [5]).

3.4 Sous-schémas localement intersection complète

Définition 3.10 *Soit A un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M}$. Une suite $g_1, \ldots, g_r$ d'éléments de $\mathcal{M}$ est dite régulière si g_i n'est pas un diviseur de 0 dans $A/ < g_1, \ldots, g_{i-1} >$.*

On peut montrer que cette définition ne dépend pas de l'ordre des g_i. Dans le cas où A est une k-algèbre intègre de type fini, cela résulte de la caractérisation ci-dessous (Proposition 3.12).

Définition 3.11 *Un sous-schéma $Y \subset X$ est dit localement intersection complète s'il existe un recouvrement de X par des ouverts affines U_i tels que chaque $Y \cap U_i \subset U_i$ est défini par une suite régulière, c'est-à-dire que l'idéal I_i définissant $Y \cap U_i$ dans U_i est engendré par une suite régulière dans chaque anneau local $\mathcal{O}_{X,y}$, $y \in Y$.*

Rappelons qu'un k-schéma de type fini irréductible X non vide a une dimension, qu'on peut définir comme la degré de transcendance de $k(X)$ sur k. On dit qu'un k-schéma de type fini X est de dimension pure n si toutes ses composantes irréductibles non vides sont de dimension n (X ne peut pas alors avoir de composantes immergées). Si X est vide, il n'a pas de dimension, ou plutôt, il a n'importe quelle dimension.

On peut également parler de la dimension de X en chaque point fermé $x \in X$. C'est la dimension maximale des composantes irréductibles de X passant par x.

Théorème 3.12 *Si $X = Spec\, A$ est un k-schéma affine de type fini de dimension pure n, et Y est défini par $g_1, \ldots, g_r$, Y est de pure dimension $n - r$ si et seulement si la suite $g_1, \ldots, g_r$ est régulière dans chaque localisé A_y, y point fermé de Y.*

En raisonnant par récurrence, c'est une conséquence immédiate de la proposition suivante :

Proposition 3.13 *Soit A une k-algèbre de type fini, de dimension pure d. Soit $f \in A$. Alors les anneaux locaux A_y/f, $y \in V(f)$ de A/f sont de dimension pure $d - 1$ si et seulement si f ne divise pas 0 dans les anneaux locaux A_y, $y \in V(f)$.*

Démonstration. Si f divise 0 dans un anneau local A_y, il est contenu dans un idéal premier minimal de A_y (grâce à notre hypothèse qu'il n'y a pas de composante immergée). Donc il existe un idéal premier minimal μ de A_y tel que A_y/μ est un quotient de A_y/f. On a alors $dim\, A_y/\mu = dim\, A_y \leq dim\, A_y/f$.

On se contentera de montrer la réciproque dans le cas où A est intègre. On sait donc que $f \neq 0$, on peut supposer que f n'est pas inversible (sinon $V(f) = \emptyset$) et on veut montrer que $dim\, A/f = dim\, A - 1$.

On va utiliser le lemme de normalisation 1.32. Comme $dim\, A = d$, on sait que A est une extension algébrique intègre d'un sous-anneau isomorphe à $k[x_1, \ldots, x_d]$. On a alors par définition $dim\, A = d$. A étant intègre, tout élément de A est solution d'une équation normalisée de degré égal à $deg\, Frac\, A/k(x_1, \ldots, x_d)$:

$$g^l = \sum_{i<l} b_i g^i$$

avec $b_i \in k[x_1, \ldots, x_d]$ et dont le dernier coefficient $b_0 = Nm(g)$ est non nul.

Si $\overline{\mu}$ est un idéal premier associé de A/f correspondant à un idéal premier μ de A contenant f, $\mu \cap k[x_1, \ldots, x_d]$ est un idéal premier de $k[x_1, \ldots, x_d]$ contenant $Nm\, f$. De plus, par définition des idéaux associés, on a

$$\overline{\mu} = Ann\, \overline{g},$$

pour un $\overline{g} \neq 0$ dans A/f. En d'autres termes

$$\mu = \{y \in A, \exists y' \in A, gy = fy' \text{ dans } A\}, \tag{8}$$

pour un relèvement g de $\overline{g}$ dans A. Notons que g satisfait une équation

$$Nm\, g = gP(g)$$

où P est un polynôme à coefficients dans $k[x_1, \ldots, x_d]$. Donc on a aussi en multipliant par $P(g)$ dans (8)

$$(Nm\, g)y = fy'' \text{ dans } A.$$

L'intersection $\mu' = \mu \cap k[x_1, \ldots, x_d]$ est donc constituée d'éléments $y \in k[x_1, \ldots, x_d]$ tels que

$$(Nm\, g)y = fy'' \text{ dans } A, \tag{9}$$

où le terme de gauche appartient en fait à $k[x_1, \ldots, x_d] \subset A$.

Comme $Nm\, g \neq 0$, un tel y doit être un diviseur de 0 dans $k[x_1, \ldots, x_d]/Nm\, f$, comme on le voit en prenant les normes dans (9).

Mais on peut utiliser ici le fait que $k[x_1, \ldots, x_d]$ est factoriel : tout polynôme non nul est soit une constante, soit un produit de polynômes irréductibles qui engendrent des idéaux irréductibles.

Si $Nm\, f$ est une constante, alors l'équation $fQ(f) = Nm\, f$ satisfaite par f montre que f est inversible dans A, ce qui contredit notre hypothèse.

Donc $Nm\, f$ admet une unique décomposition en éléments irréductibles et tout diviseur de 0 de $k[x_1, \ldots, x_d]/Nm\, f$ correspond à un élément de $k[x_1, \ldots, x_d]$ divisible par un facteur irréductible de $Nm\, f$. Les idéaux μ' ci-dessus doivent donc être en fait engendrés par des facteurs irréductibles de $Nm\, f$. Il est alors immédiat (regarder le degré de transcendance) que les anneaux correspondants $k[x_1, \ldots, x_d]/\mu'$ sont de dimension $d-1$. Donc $dim\, A/\mu = d-1$ car A/μ est intègre et entier sur son sous-anneau $k[x_1, \ldots, x_d]/\mu'$.

■

Une autre caractérisation fait intervenir les cônes normaux.

Proposition 3.14 *Supposons X de type fini sur k. Y est localement intersection complète dans X si et seulement si le cône normal de Y dans X est localement isomorphe à $Y \times_k A_k^r$.*

Démonstration. On va supposer ici X de dimension pure n pour simplifier. C'est un énoncé local. Il faut voir qu'un sous-schéma affine $Y \subset X = Spec\, A$ est défini par une suite régulière $g_1, \ldots, g_r$ si et seulement si $\oplus_l I^l/I^{l+1} \cong A/I[X_1, \ldots, X_r]$.

Supposons que Y est défini par une suite régulière $g_1, \ldots, g_r$. On définit un morphisme de $A/I[x_1, \ldots, x_r]$ dans $\oplus_l I^l/I^{l+1}$ en envoyant un polynôme homogène $P(x_i)$ de degré l à coefficients dans A/I sur $P(g_i) \in I^l/I^{l+1}$ (on vérifie que cela ne dépend des coefficients de P que modulo I). Cette application est évidemment surjective.

La flèche est donc injective si et seulement si les deux anneaux ont la même dimension. Celui de droite est de dimension pure $n = dim\, X$, en tant que gradué d'un complété formel. Celui de gauche est de dimension pure n si et seulement si Y est de dimension pure $n - r$ et donc si et seulement si Y est localement intersection complète d'après la proposition 3.12.

Inversement, si on a un isomorphisme $A/I[x_1, \ldots, x_r] \cong \oplus_l I^l/I^{l+1}$, on prend des $g_1, \ldots, g_r \in I$ tels que leurs images modulo I^2 correspondent aux x_i. Les g_i engendrent alors I au voisinage de tout point de Y, et par l'argument précédent, forment une suite régulière au voisinage de tout point de Y. Donc Y est localement intersection complète dans X. ■

Remarque 3.15 Un sous-schéma de X localement intersection complète n'est pas nécessairement une intersection complète dans tout ouvert affine de X. Il y a à cela des obstructions liées aux groupes de Chow. Par exemple, un point x dans une surface lisse X est localement intersection complète, puisqu'on sait que l'idéal de x admet deux générateurs dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Cependant, en général, si on considère un voisinage affine U de x dans X, x n'est pas une intersection complète de deux courbes dans U. Cela entraînerait que le groupe de Chow $CH_0(X)$ (cf [5]) de X est trop petit.

3.5 Construction de (sous)-schémas

3.5.1 Fibrés affines et projectifs

Fibrés affines. Soit X un k-schéma et $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre de rang r sur X. On construit alors un faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres $Sym^{\cdot}\mathcal{E}$, obtenu en trivialisant localement $\mathcal{E}$ sur des ouverts affines :

$$t_U : \mathcal{E}_U \cong \mathcal{O}_U^r = V \otimes_k \mathcal{O}_U,$$

où $V = k^r$, et en posant

$$Sym^{\cdot}\mathcal{E} = Sym^{\cdot}V \otimes_k \mathcal{O}_U^r.$$

On construit alors le schéma $Spec\, Sym^{\cdot}\mathcal{E}$, qui n'est pas un k-schéma affine, mais est affine au-dessus de X. En d'autres termes, il est muni d'un morphisme dit structurel

$$\phi : Spec\, Sym^{\cdot}\mathcal{E} \to X$$

qui est affine (cf section 1.5). Sur un ouvert affine trivialisant $U = Spec\, A$ de X au-dessus duquel $\mathcal{E}$ est trivial, on a $\Gamma(Sym^{\cdot}\mathcal{E}) = Sym^{\cdot}V \otimes_k A$, qui est une k-algèbre de type fini, et on dispose donc du k-schéma affine $Spec\, Sym^r V \otimes_k A$, qui admet un morphisme naturel sur $Spec\, A$. En fait, par définition des produits (cf section 1.3.3), on a

$$Spec\, Sym^r V \otimes_k A \cong A_k^r \times_k U. \tag{10}$$

Le schéma $Spec\, Sym^{\cdot}\mathcal{E}$ est obtenu en recollant les schémas affines $A_k^r \times_k U$ via les applications de recollement données par les fonctions de transition de $\mathcal{E}$.

Remarque 3.16 Les fonctions de transition $t_V \circ t_U^{-1}$ sur $U \cap V$ vont fournir des morphismes d'algèbres symétriques associées, qui vont fournir de façon *contravariante* les morphismes de recollement entre schémas.

Notons qu'on a une application naturelle ϕ : $Spec\,Sym^{\cdot}\mathcal{E} \to X$ et que par définition, on récupère l'algèbre $Sym^{\cdot}\mathcal{E}$ par la formule :

$$Sym^{\cdot}\mathcal{E} = \phi_*\mathcal{O}.$$

Pour récupérer le faisceau $\mathcal{E}$ lui-même, il faut utiliser la structure d'espace vectoriel des fibres de ϕ (cf (10)) : d'après la description locale de ϕ donnée dans (10), on trouve que $\mathcal{E}^*$ s'identifie au faisceau des sections locales de ϕ, puisque les morphismes de A-algèbres de $Sym^{\cdot}V \otimes_k A$ dans A s'identifient aux morphismes de A-modules de $V \otimes_k A$ dans A.

En géométrie, on aime employer le terme de fibré vectoriel, plutôt que de fibré affine (qui prête évidemment à confusion). Notons aussi que la prédominance de l'algèbre sur la géométrie nous a fait construire ci-dessus à partir de $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel E' dont le faisceau des sections est le dual de $\mathcal{E}$. C'est un peu paradoxal, mais du point de vue de la géométrie algébrique, où on part toujours des algèbres de fonctions, c'est cohérent.

Remarque 3.17 (Suite de la remarque 3.16) Les matrices de transition du fibré vectoriel E' sont les inverses des transposées des matrices de transition du faisceau $\mathcal{E}$, qui sont par définition les morphismes

$$t_V \circ t_U^{-1} : \mathcal{O}^r_{U\cap V} \cong \mathcal{O}^r_{U\cap V}.$$

On peut utiliser la notation E pour le dual de E', un fibré vectoriel qui a les mêmes fonctions de transition que $\mathcal{E}$ et dont le faisceau de sections est $\mathcal{E}$.

Fibrés projectifs. Les notations étant comme ci-dessus, on peut aussi construire le k-schéma $Proj\,Sym^{\cdot}\mathcal{E}$, muni d'un morphisme ϕ vers X. Il est obtenu en recollant les schémas $Proj\,Sym^{\cdot}V \otimes_k A$ associées aux algèbres graduées en utilisant les fonctions de transition de $\mathcal{E}$ pour recoller les algèbres graduées $Sym^{\cdot}V \otimes_k A$ et de façon contravariante les schémas $Proj\,Sym^{\cdot}V \otimes_k A$.

On utilise la notation $p : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$ pour ce schéma projectif au-dessus de X. Il est muni d'un faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ obtenu en recollant les faisceaux inversibles $\mathcal{O}(1)$ définis au-dessus des $Proj\,Sym^r V \otimes_k A$ (cf section 2.3.2) via les recollements naturels.

Ce faisceau a la propriété que $p_*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{E}$. Ceci est obtenu à l'aide du théorème 2.19.

Cette notation due à Grothendieck est controversée, dans la mesure où on aurait envie que $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ soit le fibré projectif paramétrant les droites contenues dans le fibré vectoriel E sur X dont les sections algébriques sont le faisceau $\mathcal{E}$. C'est le choix fait par Fulton.

Il se trouve que ce fibré vectoriel est dual de $Spec\,Sym^{\cdot}\mathcal{E}$, comme on l'a vu plus haut.

On peut faire un compromis et adopter la notation $\mathbb{P}(E)$ pour le fibré projectif des droites de E. On a alors $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}(E^*)$.

3.5.2 Lieux des zéros d'une section d'un faisceau localement libre

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre de rang r sur un k-schéma de type fini X. Soit σ une section de $\mathcal{E}$. σ fournit un morphisme de faisceaux cohérents

$$\sigma : \mathcal{E}^* \to \mathcal{O}_X$$

dont l'image est un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ définissant un sous-schéma X_σ de X. Notons que $\mathcal{E}^*$ étant localement libre de rang r, le faisceau $\mathcal{I}$ admet localement r générateurs.

Lorsque le schéma est localement intersection complète de codimension r (ou vide), on dit que la section σ est transverse.

On a la proposition suivante, qui est très utile :

Proposition 3.18 *Si le faisceau $\mathcal{E}$ est engendré par ses sections, il existe un ouvert de Zariski non vide $U \subset A_k^N$, tel que pour tout point $\sigma \in U(\overline{k})$, la section σ de $\mathcal{E}$ est transverse.*

Ici $k^N = A_k^N(k)$ est le k-espace vectoriel $\Gamma(X, \mathcal{E})$.

Démonstration. Supposons pour simplifier que X est irréductible. On considère $X \times_k A_k^N$, sur lequel on a une section tautologique $\tilde{\sigma}$ du fibré $pr_1^*\mathcal{E}$, définie de la façon suivante.

L'isomorphisme $k^N \cong \Gamma(X, \mathcal{E})$ est donné par une base $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ de $\Gamma(X, \mathcal{E})$. Soit $A_k^N = Spec\, k[x_1, \ldots, x_N]$. La section $\tilde{\sigma}$ est définie par

$$\tilde{\sigma} = \sum_i x_i pr_1^* \sigma_i.$$

Le lieu Z des zéros de $\tilde{\sigma}$ est par définition de $\tilde{\sigma}$ l'ensemble

$$\{(x, \sigma),\, \sigma(x) = 0\},$$

où l'expression "$\sigma(x) = 0$" signifie que l'idéal défini par σ s'annule sur x.

Le lieu Z est très simple à comprendre, du fait que $\mathcal{E}$ est engendré par ses sections. En effet la fibre de $pr_1 : Z \to X$ au-dessus de x est constituée des éléments de $k(x)^N \cong \Gamma(X_{k(x)}, \mathcal{E}_{k(x)})$ s'annulant en x, et comme $\mathcal{E}$ est engendré par ses sections, c'est un $k(x)$-espace vectoriel de dimension $N - r$. En fait, Z est un fibré vectoriel sur X (voir section 3.5.1) de rang $N - r$. Plus précisément, considérons le morphisme d'évaluation

$$\mathcal{O}_X^N \to \mathcal{E},$$

qui est la somme des morphismes $\mathcal{O}_X \to \mathcal{E}$ associés aux sections σ_i. Ce morphisme est surjectif par hypothèse et son noyau $\mathcal{K}$ est donc localement libre (exercice). Clairement Z s'identifie au fibré affine dont le faisceau des sections est $\mathcal{K}$, c'est-à-dire au fibré $Spec\, Sym^{\cdot} \mathcal{K}^*$. Comme $rang\, \mathcal{K} = n - r$, on a montré que Z est irréductible et de dimension $dim\, X + N - r$.

Il en résulte que la fibre générique de $pr_2 : Z \to A_k^N$ est soit vide, si pr_2 n'est pas dominante, soit de dimension (comme $k(A_k^N)$-schéma) égale à $dim\, Z - N = dim\, X - r$ par le lemme 3.19 suivant.

Dans le premier cas, $Im\, pr_2$ n'est pas Zariski dense, et si U est un ouvert de Zariski non vide de A_k^N, tel que $Im\, pr_2 \subset A_k^N \setminus U$, on trouve que pour tout $\sigma \in U(\overline{k})$, $pr_2^{-1}(\sigma)$ est vide. Comme pour $\sigma \in \overline{k}^N$, la fibre

$$X_\sigma = pr_2^{-1}(\sigma) \subset X_{\overline{k}}$$

est par définition de Z le lieu d'annulation de σ, on en conclut le résultat dans ce cas.

Dans le second cas, on en conclut d'après le lemme 3.20 suivant que $dim\, pr_2^{-1}(\sigma) = dim\, X - r$ pour σ un $\overline{k}$-point de k^N pris dans un ouvert U non vide de A_k^N. Comme $pr_2^{-1}(\sigma) \subset X_{\overline{k}}$ est le lieu d'annulation de σ, la proposition est une conséquence de la proposition 3.12. ■

Lemme 3.19 *On a l'additivité suivante des dimensions : si $f : Z \to Z'$ est un morphisme dominant, avec Z et Z' irréductibles de type fini sur k, alors $dim\, Z = dim\, Z' + dim\, F$, où F est la fibre générique de f.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition de la dimension comme degré de transcendance, et de l'additivité des degrés de transcendance. ■

Lemme 3.20 *Soit X un k-schéma de type fini irréductible réduit. Soit Z un k-schéma de type fini irréductible réduit et soit $\phi : Z \to X$ un morphisme dont la fibre générique est un $k(X)$-schéma irréductible de dimension d. Alors, il existe un ouvert U de X, tel que pour tout $\overline{k}$-point fermé $u \in U$, on ait $dim_{k(u)} Z_u = d$.*

Démonstration. On peut supposer que $X = Spec\, A$ et $Z = Spec\, B$ sont affines. Le $k(X)$-schéma $Z_{k(X)}$ est alors égal à $Spec\, B \otimes_A Frac\, A$ et est de dimension d sur $Frac\, A = k(X)$. On applique le lemme de normalisation d'Emmy Noether 1.32. Il nous dit que l'algèbre $B \otimes_A Frac\, A$, $Frac\, A = k(X)$ est une extension algébrique d'une sous-algèbre $Frac\, A[\theta_1, \dots \theta_d]$. Si $a_1, \dots, a_N$ sont des générateurs de B comme k-algèbre, soit P_i le polynôme normalisé à coefficients dans $Frac\, A[\theta_1, \dots, \theta_d]$ satisfait par a_i.

Soit U l'ouvert de Zariski de X où les coefficients des P_i n'ont pas de pôles. Pour tout point u de U, l'algèbre $B \otimes_k k(u)$ est une extension algébrique de $k(u)[\theta_1, \dots, \theta_d]$. Or on a $Z_{k(u)} = Spec\, B \otimes_k k(u)$.

■

Remarque 3.21 *Si le corps k est infini, l'ouvert U a certainement des k-points, et on peut donc affiner l'énoncé de la proposition 3.18 en précisant l'existence de sections transverses définies sur k.*

Exemple 3.22 *On peut prendre pour $\mathcal{E}$ une somme directe de fibrés inversibles $\mathcal{E} = \oplus_1^r \mathcal{L}_i$. Une section σ de $\mathcal{E}$ est alors un r-uple $\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, où$\sigma_i \in H^0(X, \mathcal{L}_i)$, qui définit une hypersurface Y_i de X (de codimension pure 1 si σ_i est transverse) et le lieu des zéros Z de σ est alors l'intersection schématique des Y_i. Lorsque la section σ est transverse, on dit que Z est l'intersection complète des Y_i.*

3.5.3 Revêtements cycliques

Il existe une très jolie construction de schémas finis au-dessus d'un schéma donné X, pour lesquels on a besoin des données suivantes :

1. Un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X.
2. Pour un entier $N > 0$, une section τ de $\mathcal{L}^{\otimes N}$.

On construit alors *le revêtement cyclique de degré N de X associé à $\mathcal{L}$ et σ* de la façon suivante.

On part de $Z = Spec\, Sym^{\cdot}\mathcal{L}^{-1}$. Soit $\phi : Z \to X$ le morphisme naturel. On a vu que $\phi_*\mathcal{O}_Z = Sym^{\cdot}\mathcal{L}^{-1} = \oplus_{n\leq 0}\mathcal{L}^n$, et il en résulte que

$$\phi_*\phi^*\mathcal{L} = \oplus_{n\leq 1}\mathcal{L}^n$$

contient $\mathcal{O}_X$ en facteur direct. On a donc une section canonique τ de $\phi^*\mathcal{L}$. (Le lieu des zéros de cette section est la section 0 du fibré en droites $Z \to X$.)

Le revêtement cyclique $r : R \to X$ est défini comme le lieu d'annulation de la section $\tau^N - \phi^*\sigma$ de $\phi_*\phi^*\mathcal{L}$.

L'application $r : R \to X$ est finie et plate. En effet elle est clairement affine et $r_*\mathcal{O}_R$ est une extension algébrique de $\mathcal{O}_X$. La platitude résulte du lemme suivant qui montre en particulier que $r_*\mathcal{O}_R$ est localement libre :

Lemme 3.23 *On a $r_*\mathcal{O}_R \cong \oplus_{0\leq i<N}\mathcal{L}^{-i}$, et la structure de faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbre sur $r_*\mathcal{O}_R$ est donnée par*

$$\mathcal{L}^{-i} \times \mathcal{L}^{-j} \to \mathcal{L}^{-i-j},\ i+j < N,\ \mathcal{L}^{-i} \times \mathcal{L}^{-j} \to \mathcal{L}^{-i-j+N},\ i+j \geq N,$$

où la première flèche est le produit tensoriel, et la seconde est composée du produit tensoriel et de la multiplication par σ.

Démonstration. On a vu que $\phi_*\mathcal{O}_Z = \oplus_{n\leq 0}\mathcal{L}^n$ et par définition, $r_*\mathcal{O}_R$ est un quotient de $\phi_*\mathcal{O}_Z$. Restreignons l'application quotient à $\oplus_{0\leq i<N}\mathcal{L}^{-i}$. Ceci nous donne un morphisme

$$\alpha : \oplus_{0\leq i<N}\mathcal{L}^{-i} \to r_*\mathcal{O}_R.$$

Comme l'équation définissant R est $\tau^N - \phi^*\sigma$ de $\phi_*\phi^*\mathcal{L}$ qui a une composante non nulle τ^N dans $\mathcal{L}^{-N}$, on voit que α est injective. Mais α est aussi surjective, car en exploitant la relation $\tau^N - \phi^*\sigma$, on peut exprimer tous les τ^m, $m \geq N$ comme des combinaisons des τ^i, $i < N$, à coefficients dans $\mathcal{O}_X$. (C'est évident pour $m < 2N$ car il suffit de multiplier l'équation par τ^{m-N}, et pour $m \geq 2N$, on écrit $\tau^{2N} = \phi^*\sigma^2$ etc...)

Ceci montre le premier énoncé, et le second est une conséquence immédiate de la démonstration.

■

3.6 Degré des sous-schémas projectifs

Soit $Y \subset \mathbb{P}^n_k$ un sous-schéma. On va définir un entier $deg\, Y$, qui ne dépendra en fait que du cycle associé à Y (cf Définition 3.4). En particulier le degré ne dépend que des composantes irréductibles de Y de dimension maximale égale à $r = dim\, Y$. Ecrivons le cycle de Y comme une somme $\sum_i n_i Y_i$, où Y_i est irréductible réduit de dimension r. On a alors

$$deg\, Y = \sum_i n_i deg\, Y_i.$$

Le degré de Y_i peut se définir de différentes manières : Supposons pour simplifier que k est infini. Alors la preuve qu'on a donnée de la version projective du lemme de normalisation d'Emmy Noether 1.32, qui ne nécessite qu'une transformation linéaire des coordonnées, dit que, si $Y_i = Proj\, A$, $A = k[X_0, \dots, X_n]/I$, quitte à effectuer un changement de variables lineaire en les X_i, A est entière sur la sous-algèbre $k[X_0, \dots, X_r]$. En particulier, les sections X_j, $0 \leq j \leq r$, de $\mathcal{O}_{Y_i}(1)$ n'ont pas de zéro commun sur Y_i, ce qui entraîne que le morphisme d'algèbres graduées

$$k[X_0, \dots, X_r] \to A$$

induit un morphisme $\phi : Y_i \to \mathbb{P}^r_k$. Un tel morphisme est appelé une projection linéaire.

On peut définir alors le degré de Y_i comme le degré du schéma de dimension 0

$$Z := \phi^{-1}(x),\ x \in U \subset \mathbb{P}^r_k(k),$$

où U est un ouvert de Zariski non vide de $\mathbb{P}^r_k(k)$ sur lequel ce degré est constant. On doit expliquer ce qu'est ce degré : $Z \subset Y_i$ est un sous schéma de dimension 0 par le fait que A est finie sur $k[X_0, \dots, X_r]$. Un tel sous-schéma possède un cycle associé $z = \sum_l m_l x_l$, où les x_l sont des sous-schémas irréductibles réduits de dimension 0 de Y_i c'est-à-dire des points fermés de Y_i. On pose alors :

$$deg\, Z := deg\, z := \sum_l m_l deg\, x_l, \tag{11}$$

où $deg\, x_l$ est le degré de l'extension de corps $k \subset k_{x_l}$.

Il faut montrer que ce degré est indépendant du choix de x dans un ouvert de Zariski non vide de $\mathbb{P}^r_k(k)$. C'est une conséquence de la platitude générique du morphisme ϕ.

Exercice 3.24 *Montrer que $deg\, Z$ est aussi le degré de l'extension de corps $k(\mathbb{P}^r_k) \subset k(Y_i)$.*

Exercice 3.25 *Soit Z est un k-schéma de type fini et de dimension 0. Montrer que $deg\, Z = dim_k H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$.*

Si le corps k n'est pas fini, on peut le remplacer par sa clôture algébrique :

Exercice 3.26 *Montrer que pour toutes extensions de corps $k \subset K \subset K'$, avec K, K' infinis, on a $deg\, Y_K = deg\, Y_{K'}$.*

On peut donc définir $deg\, Y$ comme le degré du K-schéma Y_K pour n'importe quelle extension infinie de k.

Avec cette définition, on a

Théorème 3.27 *Supposons que k est infini et soit $H \subset Y$, $H = \mathbb{P}^{n-1}_k \cap Y$ une section hyperplane générique de Y. Alors $deg\, H = deg\, Y$.*

Démonstration. Pour k infini, il existe une projection linéaire finie π de Y sur $\mathbb{P}^r_k = Proj\, k[X'_0, \dots, X'_r]$, correspondant au choix de $r+1$ sections de $\mathcal{O}_Y(1)$ sans 0 commun. De plus, si H est générique, on peut supposer les X'_i choisies de façon que H est définie par $X'_0 = 0$. On montre alors que le degré de Y est égal au degré du 0-cycle $\pi^{-1}(x)$ défini dand (11) pour un k-point *générique* de $\mathbb{P}^r_k$ et de même, grâce à la généricité de H, que le degré de H est égal au degré du 0-cycle $\pi_H^{-1}(x)$, où $\pi_H : H \to \mathbb{P}^{r-1}_k$ est la restriction de π_H à H, qui est à valeurs dans l'hyperplan $\mathbb{P}^{r-1}_k \subset \mathbb{P}^r_k$ défini par X'_0 et x est générique dans $\mathbb{P}^{r-1}_k$. Le résultat résulte alors du fait que les schémas $\pi^{-1}(x)$ et $\pi_H^{-1}(x)$ coïncident. ■

Remarque 3.28 La condition “générique” est nécessaire dans le théorème 3.27. Par exemple, si H contient une composante immergée de X, le résultat est faux.

Deuxième partie

Le point de vue complexe

L'ensemble algébrique $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (ou encore le spectre maximal de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$) peut être vu comme une variété complexe compacte : il est en effet recouvert par des ouverts isomorphes à $\mathbb{C}^n$, les fonctions de transition permettant de recoller les ouverts le long de leurs intersections étant des fonctions rationnelles des coordonnées, et en particulier des fonctions holomorphes. En tant que variété complexe, on notera cet ensemble (muni de la topologie usuelle et du faisceau de fonctions holomorphes) $\mathbb{CP}^n$.

De même, toute sous-variété algébrique lisse X de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ peut être vue comme une sous-variété complexe fermée de $\mathbb{CP}^n$. En effet, cette variété est définie par des équations homogènes qui dans les ouverts affines standards se déshomogénéisent pour donner des équations polynomiales en les coordonnées, et en particulier holomorphes. On notera X^{an} la variété complexe correspondante, munie de la topologie usuelle et du faisceau de fonctions holomorphes.

La lissité algébrique (voir section 7) est caractérisée par le critère jacobien de rang des équations locales, et fournit donc aussi bien la lissité de la sous-variété complexe correspondante.

Les questions auxquelles répondent cette partie sont :

1. Quelles sont les variétés complexes compactes qui peuvent être réalisées comme sous-variétés complexes de l'espace projectif ?
2. Quelles sont les sous-variétés complexes de l'espace projectif qui sont définies par des équations algébriques ?

La réponse à la question 1 est donnée par le théorème de plongement de Kodaira. La réponse à la question 2 est donnée par le théorème de Chow, largement généralisé par Serre sous le nom de principe GAGA (géométrie analytique et géométrie algébrique).

4 Variétés complexes et kählériennes

4.1 Variétés complexes et fibrés vectoriels

4.1.1 Fonctions holomorphes

Soit $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}^n$, une application de classe C^1 d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$. La différentielle df est en chaque point $x \in U$ une application $\mathbb{R}$-linéaire :

$$df_x : T_{U,x} \cong \mathbb{C}^n \to T_{\mathbb{C},f(x)} \cong \mathbb{C}.$$

Définition 4.1 *Une telle application f est dite holomorphe si les différentielles df_x sont toutes $\mathbb{C}$-linéaires.*

Une conséquence remarquable des formules intégrales satisfaites par ces fonctions est l'équivalence suivante (cf [12], 1.2.1) :

Théorème 4.2 *Une fonction f sur U est holomorphe si et seulement si elle est analytique complexe, c'est-à-dire qu'elle est la somme de sa série de Taylor qui a un rayon de convergence non nul en tout point $x \in U$ et dont chaque terme est polynomial en les variables complexes $z_i - z_i(x)$.*

4.1.2 Opérateur $\overline{\partial}$ sur les fonctions

En général, l'espace des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ est la somme directe de deux sous-espaces vectoriels complexes, à savoir les applications $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ d'une part et les applications $\mathbb{C}$-antilinéaires de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ d'autre part. En effet, notant I l'opérateur de structure complexe sur $\mathbb{C}^n$ (c'est-à-dire la multiplication par ι, qu'on voit comme un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}^n$, et notant J l'opérateur de structure complexe sur $\mathbb{C}$, on a l'opérateur

$$f \mapsto J^{-1} \circ f \circ I$$

agissant sur $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$. On vérifie que c'est une involution, et les deux espaces ci-dessus sont simplement les espaces invariant et anti-invariant respectivement pour cette involution.

On appellera forme différentielle de type $(1,0)$ une forme différentielle sur U à valeurs complexes et qui est $\mathbb{C}$-linéaire en chaque point. De même, les formes différentielles sur U à valeurs complexes et qui sont $\mathbb{C}$-anti-linéaires en chaque point seront appelées “formes de type $(0,1)$”.

Si f est une fonction de classe C^1 de $U \subset \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$, on décompose la forme différentielle df en

$$df = \partial f + \overline{\partial} f,$$

suivant la décomposition ci-dessus des formes différentielles à valeurs complexes. Ceci définit les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ sur les fonctions. Par définition, f est donc holomorphe sur U si et seulement si $\overline{\partial} f = 0$.

Notons que sur $\mathbb{C}$ muni de sa coordonnée complexe $z = x + \iota y$, les formes de type $(1,0)$ sont engendrées sur $\mathbb{C}$ par $dz := dx + \iota dy$ et les formes de type $(0,1)$ par $d\overline{z} := dx - \iota dy$.

Définition 4.3 *Pour une fonction $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de classe C^1, on définit les fonctions continues*

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$$

par les relations

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz, \overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}.$$

En d'autres termes on a

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}.$$

De plus, par définition, f est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. On utilisera le résultat suivant (cf [12], 1.3) :

Théorème 4.4 *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application de classe C^1, où U est un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors il existe localement sur U une fonction g de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que*

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = f.$$

En fait on aura besoin d'une version "avec paramètre" :

Théorème 4.5 *Soit $f : W \times V \times U \to \mathbb{C}$ une application de classe C^1, et holomorphe en V, où V est un ouvert de $\mathbb{C}^t$, W est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et U est un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors il existe localement sur $W \times V \times U$ une fonction g de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{C}$, holomorphe en V et telle que*

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f.$$

Ici l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ est relatif à la variable z sur U.

4.1.3 Composition et changement de variables

Soit $\phi : U \to V$ une application de classe C^1, où U et V sont des ouverts de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^m$ respectivement, et soit $f : V \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. On dira que ϕ est holomorphe si sa différentielle en chaque point est $\mathbb{C}$-linéaire, ce qui équivaut aussi à dire que les composantes ϕ_i de $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ de $\phi : U \to \mathbb{C}^m$ sont holomorphes.

On a alors

$$d(f \circ \phi)_x = df_{\phi(x)} \circ d\phi_x,$$

et comme chacune des applications linéaires $df_{\phi(x)}$ et $d\phi_x$ sont $\mathbb{C}$-linéaires, on en déduit que $d(f \circ \phi)_x$ l'est. En conclusion, la composition de deux applications holomorphes est holomorphe.

4.1.4 Variétés complexes

Une variété complexe compacte X est une variété différentiable compacte sur laquelle on s'est donné des cartes $\phi_i : U_i \cong V_i$, où les U_i forment un recouvrement ouvert de X et les V_i sont des ouverts de $\mathbb{C}^n$, les isomorphismes ϕ_i étant des difféomorphismes tels que les $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ soient holomorphes là où ils sont définis, c'est-à-dire sur $\phi_i(U_i \cap U_j)$.

Notons que comme les fonctions de transition sont holomorphes, elles sont de classe analytique, et donc X est en particulier une variété différentiable de classe C^∞.

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de X.

Définition 4.6 *f est dite holomorphe sur U, si le composé $f \circ \phi_i^{-1}$, défini sur l'ouvert $\phi_i(U \cap U_i)$ de $\mathbb{C}^n$, est une fonction holomorphe sur cet ouvert.*

Cette définition est cohérente car on sait que $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ est holomorphe, et que la composition d'applications holomorphes est holomorphe, de sorte que $f \circ \phi_i^{-1}$ est holomorphe sur $\phi_i(U \cap U_i \cap U_j)$ si et seulement si $f \circ \phi_j^{-1}$ est holomorphe sur $\phi_j(U \cap U_i \cap U_j)$.

On peut introduire le faisceau des fonctions holomorphes $\mathcal{O}_X$ sur une variété complexe X. C'est le sous-faisceau du faisceau des fonctions différentiables à valeurs complexes qui à $U \subset X$ associe l'ensemble des fonctions holomorphes sur U (noter que c'est un anneau, et plus précisément une $\mathbb{C}$-algèbre, car la somme et le produit de deux fonctions holomorphes est holomorphe).

Muni de ce faisceau d'anneaux, X est un espace localement annelé, localement isomorphe à $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Plus tard, lorsqu'on aura une variété algébrique complexe qu'on verra comme une variété complexe, on prendra soin de distinguer les topologies (usuelle et Zariski), ainsi que les faisceaux de fonctions (holomorphe et algébrique).

4.1.5 Fibrés vectoriels holomorphes

Sur une telle variété complexe, un fibré vectoriel holomorphe de rang r est un fibré vectoriel différentiable complexe muni de trivialisations $\psi_i : E_{|U_i} \cong U_i \times \mathbb{C}^r$ relatives à un recouvrement ouvert adéquat de X, telles que les matrices de transition

$$M_{ij} := \psi_j \circ \psi_i^{-1} : U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^r \cong U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^r$$

qui sont $\mathbb{C}$-linéaires en la seconde variable et commutent avec la première projection, et peuvent donc être vues comme des fonctions sur $U_i \cap U_j$ à valeurs dans l'espace des endomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}^n$, ou encore dans l'espace des matrices de type (n, n) à coefficients complexes, soient holomorphes sur $U_i \cap U_j$.

La donnée d'un fibré vectoriel holomorphe de rang r est équivalente à la donnée de son faisceau de sections holomorphes, qui est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules libres de rang r. En effet, ils ont les mêmes matrices de transition.

Exemple 4.7 *Le fibré tangent T_X. Les cartes holomorphes $\psi_U : U \subset X \to \mathbb{C}^n$ identifient sur les ouverts U le fibré tangent T_X au fibré trivial de fibre $\mathbb{C}^n$. Les fonctions de transition sont données par les différentielles*

$$d(\psi_V \circ \psi_U^{-1})$$

sur $U \cap V$. Comme $\psi_V \circ \psi_U^{-1}$ est holomorphe sur $\psi_U(U \cap V)$, ces matrices de transition sont holomorphes, données par la matrice jacobienne holomorphe de $\psi_V \circ \psi_U^{-1}$.

Le fibré tangent d'une variété complexe est donc naturellement muni d'une structure de fibré vectoriel holomorphe de rang égal à $dim_{\mathbb{C}} X$.

On s'intéressera particulièrement aux fibrés en droites holomorphes, c'est-à-dire aux fibrés vectoriels holomorphes $\mathcal{L}$ de rang 1. Une trivialisation locale d'un tel fibré sur un ouvert U_i est donnée par une section holomorphe non nulle g_i de $\mathcal{L}$ sur U_i. La trivialisation correspondante envoie $\sigma \in \mathcal{L}$ sur $\sigma/g_i \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Les matrices de transition g_{ij} sont alors des matrices $(1, 1)$ inversibles holomorphes, c'est-à-dire des fonctions inversibles sur $U_i \cap U_j$. D'après ce qui précède elles sont données par

$$g_{ij} = g_i/g_j.$$

Du fait que ce sont des matrices de transition, elles satisfont la condition de cocycle

$$g_{ij} g_{jk} g_{ki} = 1$$

sur $U_i \cap U_j$, et donc déterminent un élément de $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, ce dernier groupe étant calculé comme la limite des cohomologies de Čech de $\mathcal{O}_X^*$ relativement aux recouvrements ouverts $\mathcal{U}$ de X.

Lemme 4.8 *De cette manière, les classes d'isomorphismes de fibrés en droites holomorphes sur X sont paramétrées par $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.*

Démonstration. C'est une généralité, où l'on aurait pu remplacer le faisceau structurel des fonctions holomorphes par le faisceau des fonctions différentiables à valeurs complexes, où le faisceau des fonctions continues à valeurs complexes, pour obtenir la classification des fibrés en droites complexes différentiables ou continus. On a déjà associé ci-dessus à un fibré en droites un élément de $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.

Inversement, tout élément de $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ est représenté par un cocycle de Čech de degré 1 à valeurs dans $\mathcal{O}_X^*$ pour un recouvrement adéquat de X par des ouverts U_i. Soit $g_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}}^*)$ un tel représentant, satisfaisant la condition de cocycles

$$g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1.$$

Considérons le préfaisceau $\mathcal{G}$ sur X défini par

$$\mathcal{G}(U) = \{(f_i),\ f_i \in \Gamma(U \cap U_i, \mathcal{O}),\ f_j = g_{ij}f_i \text{ sur } U \cap U_i \cap U_j\}.$$

La condition de cocycles, qui donne la compatibilité des conditions ci-dessus sur les intersections triples, entraîne que ceci est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules localement isomorphe à $\mathcal{O}_X$. ∎

La suite exacte exponentielle. On a sur une variété complexe la suite exacte exponentielle, qui dit qu'une fonction holomorphe inversible est localement l'exponentielle d'une fonction holomorphe définie à une constante multiple de $2\iota\pi$ près :

$$0 \to \mathbb{Z} \stackrel{2\iota\pi}{\to} \mathcal{O}_X \stackrel{exp}{\to} \mathcal{O}_X^* \to 0. \tag{12}$$

La suite exacte longue de cohomologie associée fournit :

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X) \dots \tag{13}$$

La flèche

$$c_1 : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z})$$

qui apparaît ici est appelée la première classe de Chern. Elle est en fait topologique au sens où $c_1(\mathcal{L})$ ne dépend que du fibré vectoriel complexe de rang 1 topologique sous-jacent. Cette classe peut s'interpréter comme la classe d'Euler du fibré réel de rang 2 sous-jacent.

Remarque 4.9 Si X est compacte, toute fonction holomorphe sur X est constante sur chaque composante connexe de X par le principe du maximum ([12], Théorème 1.21). Il en résulte que la suite exacte longue ci-dessus est injective sur le terme $H^1(X, \mathbb{Z})$.

Remarque 4.10 La suite exacte exponentielle topologique, où l'on remplace $\mathcal{O}_X^*$ par le faisceau des fonctions continues inversibles à valeurs dans $\mathbb{C}$ montre que toute classe $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})$ est la première classe de Chern d'un fibré en droites complexes topologique, unique à isomorphisme près. En effet, les faisceaux de fonctions continues étant fins, ils sont acycliques et donc on a

$$H^1(X, \mathcal{C}_X^0) = H^2(X, \mathcal{C}_X^0) = 0,$$

ce qui garantit l'égalité

$$H^1(X, \mathcal{C}_X^{0*}) = H^2(X, \mathbb{Z}).$$

La suite exacte exponentielle holomorphe montre que α n'est la première classe de Chern d'un fibré en droites holomorphe que si α s'annule dans $H^2(X, \mathcal{O}_X)$.

4.2 Théorème de Dolbeault

4.2.1 Opérateurs ∂, $\overline{\partial}$ sur les formes

Si X est une variété complexe, on peut décomposer les formes diférentielles de degré 1 à valeurs complexes sur X en formes de type $(1,0)$ et formes de type $(0,1)$. Dans des cartes locales holomorphes $X \supseteq U \cong \mathbb{C}^n$, le fibré tangent de X est identifié à celui de $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire au fibré constant de fibre $\mathbb{C}^n$, qui admet une structure d'espace vectoriel complexe. Comme les difféomorphismes de changement de carte sont holomorphes, leurs différentielles sont $\mathbb{C}$-linéaires, ce qui revient à dire que la structure complexe sur T_X définie dans chaque carte ne dépend pas du choix de la carte. La structure complexe sur T_X ainsi définie est appelée la structure presque complexe associée à la structure complexe de X.

Les formes de type $(1,0)$ sont par définition les formes $\mathbb{C}$-linéaires sur T_X, et les formes de type $(0,1)$ sont par définition les formes $\mathbb{C}$-antilinéaires sur T_X, relativement à cette structure complexe sur T_X. On a donc une décomposition

$$\Omega_{X,\mathbb{C}} \cong \Omega_X^{1,0} \oplus \Omega_X^{0,1}, \tag{14}$$

qui induit une décomposition similaire des fibrés de formes différentielles complexes de tout degré :

$$\bigwedge^k \Omega_{X,\mathbb{C}} \cong \oplus_{p+q=k} \Omega_X^{p,q}, \tag{15}$$

où $\Omega_X^{p,q} := \bigwedge^p \Omega_X^{1,0} \otimes \bigwedge^q \Omega_X^{0,1}$.

Ces décompositions sont de classe C^∞. On notera $\mathcal{A}^{p,q}$ le faisceau des sections de classe C^∞ de $\Omega_X^{p,q}$.

La décomposition (14) fournit une décomposition

$$d\alpha = \partial\alpha + \overline{\partial}\alpha,\ \alpha \in \mathcal{C}^\infty,$$

où $\partial\alpha$ est la projection de $d\alpha$ sur $\mathcal{A}^{1,0}$ et $\overline{\partial}\alpha$ est la projection de $d\alpha$ sur $\mathcal{A}^{0,1}$.

En fait, en prenant des cartes holomorphes sur X, on obtient plus généralement :

Lemme 4.11 *Si $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(U)$, $d\alpha$ est la somme d'une forme de type $(p+1,q)$ et d'une forme de type $(p,q+1)$ définies sur U, qu'on notera respectivement $\partial\alpha$ et $\overline{\partial}\alpha$.*

Démonstration. Comme noté plus haut, on peut supposer que U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Les formes différentielles de type $(1,0)$ et de classe C^k sur U sont engendrées sur $C^k(U,\mathbb{C})$ par les dz_i, $1 \leq i \leq n$ et les formes différentielles de type $(0,1)$ et de classe C^k sur U sont engendrées sur $C^k(U,\mathbb{C})$ par les $d\overline{z}_i$, $1 \leq i \leq n$.

Une forme α de type p,q et de classe C^k, $k \geq 1$ sur U s'écrit donc comme une combinaison :

$$\alpha = \sum_{I,J} \alpha_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

où $I \subset \{1,\dots,n\}$ est un sous-ensemble de cardinal p, $J \subset \{1,\dots,n\}$ est un sous-ensemble de cardinal q,

$$dz_I = \wedge_{i\in I} dz_i,\ d\overline{z}_J = \wedge_{j\in J} d\overline{z}_j,$$

(ici on considère l'ordre naturel sur I pour définir les produits extérieurs), et les $\alpha_{I,J}$ sont des fonctions de classe C^k à valeurs complexes.

On applique alors la règle de Leibniz et le fait que les dz_I et $d\overline{z}_J$ sont des formes différentielles complexes fermées, ce qui donne

$$d\alpha = \sum_{I,J} d\alpha_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

Comme $d\alpha_{I,J}$ est la somme d'une forme de type $(1,0)$ et d'une forme de type $(0,1)$, le résultat suit. ∎

Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ définis sur les formes satisfont la règle de Leibniz au sens suivant : Si f est une fonction différentiable définie sur un ouvert $U \subset X$ d'une variété complexe, et α est une forme différentielle sur U, on a

$$\partial(f\alpha) = \partial f \wedge \alpha + f\partial\alpha,\ \overline{\partial}(f\alpha) = \overline{\partial} f \wedge \alpha + f\overline{\partial}\alpha. \tag{16}$$

De plus ils satisfont

$$\partial \circ \overline{\partial} = -\overline{\partial} \circ \partial,\ \partial \circ \partial = 0,\ \overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0. \tag{17}$$

En effet, il suffit de montrer (16) sur les formes de type donné, disons (p,q). Ceci résulte alors de la formule de Leibniz pour l'opérateur d, et des décompositions en types de $d(f\alpha)$ et de df et $d\alpha$.

Les formules (17) se montrent de même sur les formes de type (p,q). Elles résultent alors de la décomposition en types de $d\alpha$ et de $d(d\alpha)$, avec $d = \partial + \overline{\partial}$, et de $d \circ d = 0$. ∎

4.2.2 Opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe

Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur X, de faisceau de sections holomorphes $\mathcal{E}$. Notons $\mathcal{A}^{0,q}(E)$ le faisceau des $(0,q)$-formes de classe C^∞ à valeurs dans E :

$$\mathcal{A}^{0,q}(E) := \mathcal{A}^{0,q} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}.$$

Dans une trivialisation holomorphe locale de E, on a $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_X^r$, et donc toute $(0,q)$-forme α s'écrit dans cette trivialisation $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, où les α_i sont des $(0,q)$-formes définies sur le même ouvert. Posons

$$\overline{\partial}_E \alpha = (\overline{\partial}\alpha_1, \ldots, \overline{\partial}\alpha_r).$$

On vérifie, du fait que les matrices de transition sont holomorphes et donc annulées par $\overline{\partial}$ et à l'aide de la règle de Leibniz (16) que la section ainsi obtenue de $\mathcal{A}^{0,q+1}(E)$ sur l'ouvert considéré ne dépend pas du choix de la trivialisation. On a donc défini l'opérateur de Dolbeault $\overline{\partial}_E$ de E, qui satisfait la règle de Leibniz par rapport à l'opérateur $\overline{\partial}$ agissant sur les fonctions. Le calcul local et le cas de l'opérateur $\overline{\partial}$ agissant sur les formes (cf (17)) montrent qu'on a $\overline{\partial}_E \circ \overline{\partial}_E = 0$.

4.2.3 La résolution de Dolbeault

Théorème 4.12 *(Dolbeault) Le complexe de Dolbeault*

$$0 \to \mathcal{C}^\infty(E) \stackrel{\overline{\partial}_E}{\to} \mathcal{A}^{0,1}(E) \to \ldots \to \mathcal{A}^{0,n}(E) \to 0, \tag{18}$$

où $n = dim\, X$ est une résolution de $\mathcal{E}$.

Démonstration. C'est un énoncé local et par définition de $\overline{\partial}_E$, il suffit de vérifier le résultat pour $\overline{\partial}$ agissant sur $\mathcal{A}^{0,q}$. Il faut prouver que les fonctions annulées par $\overline{\partial}$ sont exactement les fonctions holomorphes, ce qui résulte de la définition de $\overline{\partial}$, et qu'une forme de bidegré $(0, q)$, $q > 0$ qui est $\overline{\partial}$-fermée est localement $\overline{\partial}$-exacte. Pour le premier énoncé, cela résulte de la définition des fonctions holomorphes (cf section 4.1.2).

Pour le second énoncé, on utilisera le théorème 4.5. Soit $\alpha = \sum_J \alpha_J d\overline{z}_J$ une forme de type $(0, q)$, $q > 0$ qui est $\overline{\partial}$-fermée. On va raisonner par récurrence sur le plus grand indice k apparaissant dans un monôme $d\overline{z}_J$ tel que $\alpha_J \neq 0$. Clairement $k \geq q$. Si $k = q$, on a

$$\alpha = f d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_q,$$

et la condition $\overline{\alpha} = 0$ montre que f est holomorphe en les variables z_j, $j > q$. Par le théorème 4.5, il existe donc localement une fonction g holomorphe en les variables z_j, $j > q$, telle que

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}_q} = f,$$

Il est alors immédiat que

$$\alpha = \pm\overline{\partial}(g d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{q-1}).$$

Supposons maintenant $k > q$. Notre forme α s'écrit

$$\alpha = \beta + d\overline{z}_k \wedge \beta',$$

où le plus grand indice apparaissant effectivement dans β et β' est $\leq k - 1$. La condition $\overline{\partial}\alpha = 0$ s'écrit :

$$\overline{\partial}\beta - d\overline{z}_k \wedge \overline{\partial}\beta' = 0.$$

Ceci entraîne clairement que les coefficients f_J de β', $J \subset \{1, \ldots, k-1\}$ sont holomorphes en les variables z_l, $l > k$. Ecrivons

$$f_J = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} g_J,$$

où g_J est holomorphe en les variables z_l, $l > k$. Alors

$$\overline{\partial} \sum_J g_J d\overline{z}_J = d\overline{z}_k \wedge \beta' + \beta'',$$

où seuls les indices $j < k$ apparaissent effectivement dans β''. On en déduit que $\alpha = \overline{\partial}\gamma + \alpha'$, où seuls les indices d'ordre $< k$ apparaissent dans α'.

∎

Corollaire 4.13 *Les groupes de cohomologie $H^i(X,\mathcal{E})$ peuvent se calculer comme les groupes de cohomologie du complexe $(A_X^{0,\cdot}(E),\overline{\partial}_E)$, où $A_X^{0,q}(E)$ est l'espace des sections globales du faisceau $\mathcal{A}^{0,q}(E)$.*

En effet la résolution de Dolbeault (18) est une résolution par des faisceaux de $\mathcal{C}^\infty$-modules, qui sont fins donc acycliques. ∎

4.3 Métriques hermitiennes, formes de Chern et classes de Chern

Soit L un fibré en droites holomorphe sur une variété complexe X. Soit h une métrique hermitienne sur L. Dans une trivialisation holomorphe locale $L \cong U \times \mathbb{C}$ donnée par une section s non nulle de L, h est donnée par une fonction différentiable ϕ réelle et strictement positive sur U : pour tout $(x,l) \in L$, avec $l = as_x$, on pose $h(l) =\mid a \mid^2 \phi(x)$. D'après cette formule, la fonction ϕ est simplement donnée par

$$\phi =\mid s \mid_h^2 .$$

On supposera désormais que h est de classe C^∞, c'est-à-dire que dans des trivialisations holomorphes locales, les fonctions ϕ correspondantes sont de classe C^∞.

Une autre section trivialisante s' se déduit de s par la règle $s' = gs$, où g est holomorphe non nulle. On a donc

$$\mid s' \mid_h^2 = g\overline{g} \mid s \mid_h^2 .$$

Comme $\partial\overline{\partial} log\, g\overline{g} = 0$, on déduit de ceci que la forme de type $(1,1)$

$$\omega_{L,h} := \frac{1}{2\iota\pi}\partial\overline{\partial} log \mid s \mid_h^2$$

ne dépend pas du choix de s. Cette forme est donc globalement définie. C'est une forme réelle de type $(1,1)$ et fermée sur X. Cette forme est appelée la forme de Chern de L associée à la métrique h. Son lien avec la classe de Chern de L est le suivant :

Théorème 4.14 *La classe $[\omega] \in H^2(X,\mathbb{R})$ de cohomologie de de Rham de la forme $\omega_{L,h}$ est égale à la première classe de Chern réelle de L, c'est-à-dire l'image dans $H^2(X,\mathbb{R})$ de $c_1(L) \in H^2(X,\mathbb{Z})$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X par des ouverts sur lesquels L est trivialisé par des sections holomorphes partout non nulles σ_i. Alors on a

$$\omega_{L,h_{|U_i}} = \frac{1}{2\iota\pi}\partial\overline{\partial}\log h_i, \quad h_i = h(\sigma_i).$$

Donc on a aussi

$$\omega_i := \omega_{L,h_{|U_i}} = d\beta_i,\ \beta_i = \frac{1}{2\iota\pi}\overline{\partial}\log h_i$$

et

$$\beta_i - \beta_j = \frac{1}{2\iota\pi}\overline{\partial}(\log h_i - \log h_j)$$

sur $U_i \cap U_j$. Rappelant que $\sigma_i = g_{ij}\sigma_j$ sur U_{ij}, où les g_{ij} sont holomorphes inversibles et peuvent, quitte à raffiner le recouvrement, être supposées de la forme $\exp 2\iota\pi f_{ij}$, on a aussi $h_i = |g_{ij}|^2 h_j$ et

$$\beta_i - \beta_j = -d\overline{f_{ij}}.$$

Finalement on a $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$ sur U_{ijk} et donc $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} \in \mathbb{Z}$ sur U_{ijk} (on suppose U_{ijk} connexe).

En considérant maintenant la résolution du faisceau $\mathbb{C}$ par le complexe simple $(\mathcal{K}^\bullet, D)$ associé au complexe double

$$\mathcal{K}^{p,q} = \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}^p_{\mathbb{C}}), D_1 = d, \quad D_2 = \delta,$$

où δ est la différentielle de Čech, et $D = d + (-1)^p\delta$, on montre d'abord que la classe $[\omega_{L,h}] \in H^2(X, \mathbb{R})$ admet pour représentant en cohomologie de Čech le cocycle $a_{ijk} = f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

En effet, si $(K^\bullet, D)$ est le complexe des sections globales du complexe de faisceaux $\mathcal{K}$, on a, du fait que $(\mathcal{K}, D)$ est une résolution du faisceau $\mathbb{C}$, une application naturelle $H^k(K^\bullet) \mapsto H^k(X, \mathbb{C})$, et d'autre part les complexes de de Rham de X et de Čech de X associé au recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)$ sont de façon naturelle des sous-complexes de $K^\bullet$, tels que les applications composées

$$H^k_{DR}(X) \to H^k(K^\bullet) \to H^k(X, \mathbb{C}),$$

$$\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \to H^k(K^\bullet) \to H^k(X, \mathbb{C})$$

soient les isomorphismes naturels. Or les égalités écrites plus haut se traduisent par

$$(\omega_i) - D(\beta_i) = \delta(\beta_i),\ \delta(\beta_i) + D(\overline{f_{ij}}) = \delta(\overline{f_{ij}}) = \delta(f_{ij})$$

dans $K^\bullet$, la dernière égalité résultant du fait que $a_{ijk} = \delta(\overline{f_{ij}})$ est un cocycle à coefficients réels (en fait entiers). Donc $\omega = (\omega_i)$ est cohomologue dans $K^\bullet$ à (a_{ijk}).

D'autre part l'élément de $H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$ correspondant à L est décrit par le cocycle de Čech $g_{ij} \in \mathcal{O}^*_{U_{ij}}$, et son image dans $H^2(X, \mathbb{Z})$ est précisément obtenue en relevant g_{ij} dans $\mathcal{O}_{U_{ij}}$ et en appliquant $\frac{1}{2\iota\pi}\delta$, où δ est la différentielle de Čech, à la cochaîne $\log g_{ij}$ ainsi obtenue. Donc cet élément est également représenté en cohomologie de Čech par (a_{ijk}). ∎

4.4 Variétés kählériennes

4.4.1 Géométrie hermitienne

Sur un espace vectoriel complexe V, une forme sesquilinéaire hermitienne h se décompose en ses parties réelle et imaginaire (qui sont des formes bilinéaires réelles)

$$h = g - i\omega,$$

où g est une forme bilinéaire symétrique et ω est une forme bilinéaire alternée. En effet, on a

$$h(v, u) = \overline{h(u, v)} \tag{19}$$

avec

$$h(v, u) = g(v, u) - \iota\omega(v, u),\ h(u, v) = g(u, v) - \iota\omega(u, v). \tag{20}$$

Il vient donc d'après (19) et (20) :

$$h(v, u) = g(u, v) + \iota\omega(u, v) = g(v, u) - \iota\omega(v, u)$$

et donc :
$$g(v,u)=g(u,v),\ \omega(v,u)=-\omega(u,v).$$

De plus ω est de type $(1,1)$ pour la structure complexe de V.

Ici la notion de forme multilinéaire alternée complexe de type (p,q) sur V est la suivante (cf section précédente) : l'espace $V^*\otimes\mathbb{C}$ des formes $\mathbb{R}$-linéaires sur V à valeurs dans $\mathbb{C}$ sur V se décompose comme la somme directe $V^{*1,0}\oplus V^{*0,1}$, où $V^{*1,0}$ est l'espace des formes $\mathbb{C}$-linéaires sur V et $V^{*0,1}$ est son conjugué complexe, l'espace des formes $\mathbb{C}$-antilinéaires sur V . Alors les formes de type (p,q) sont par définition les combinaisons linéaires à coefficients complexes des $\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_p\wedge\beta_1\wedge\ldots\wedge\beta_q$, où $\alpha_i\in V^{*1,0}$ et $\beta_j\in V^{*0,1}$. On voit immédiatement que le fait que ω soit de type $(1,1)$ équivaut au fait que $\omega(Iu,Iv)=\omega(u,v)$.

Lemme 4.15 *La correspondance $h\mapsto\omega$ est une bijection entre formes bilinéaires hermitiennes et 2- formes réelles de type $(1,1)$ sur V.*

Démonstration. Soit I l'opérateur de structure complexe sur V. On sait que
$$\omega(u,v)=\omega(Iu,Iv). \tag{21}$$
On pose $g(u,v)=\omega(u,Iv)$. La propriété (21) et le fait que ω soit alternée montrent que g est symétrique. Soit $h=g-\imath\omega$. h est hermitienne bilinéaire car
$$h(u,Iv)=g(u,Iv)-i\omega(u,Iv)=\omega(u,v)+ig(u,v)=ih(u,v),$$
et les propriétés de symétrie (resp. antisymétrie) de g, (resp. ω) montrent que $h(v,u)=\overline{h(u,v)}$. On vérifie que les applications $h\mapsto\omega$ et $\omega\mapsto h$ sont inverses l'une de l'autre. ∎

Il résulte de ce lemme que la notion de (semi)-positivité pour les formes bilinéaires hermitiennes fournit la notion correspondante de (semi)-positivité pour les formes réelles de type $(1,1)$.

Définition 4.16 *On dira qu'une forme réelle de type $(1,1)$ sur V est positive si la forme hermitienne correspondante l'est.*

4.4.2 Métriques kählériennes

Sur une variété complexe X, l'espace tangent en chaque point $T_{X,x}$ est muni d'une structure complexe qui varie de façon C^∞ avec x et la correspondance ci-dessus induit une correspondance bijective entre formes hermitiennes bilinéaires de classe C^∞ sur T_X, et 2-formes réelles de type $(1,1)$ sur X. En particulier, si h est une métrique hermitienne de classe C^∞ sur T_X, on peut écrire
$$h=g-i\omega,$$
où g est une métrique riemannienne (compatible avec la structure presque-complexe car $g(Iu,Iv)=g(u,v)$), et ω est une $(1,1)$-forme définie positive.

Définition 4.17 *La métrique h est dite kählérienne si de plus la 2-forme ω est fermée.*

La classe de cohomologie de de Rham $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$ de la 2-forme fermée ω est appelée la classe de Kähler de la métrique de Kähler déterminée par ω.

Exemple 4.18 *La métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{CP}^n$.* Cette métrique est construite de la façon suivante. Rappelons l'existence du fibré en droites holomorphe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ sur $\mathbb{CP}^n$. Ce fibré est dual du sous-fibré tautologique $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^{n+1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ dont la fibre en un point x de $\mathbb{P}^n$ est la droite $L =< x >$ de $\mathbb{C}^{n+1}$. Considérons la métrique hermitienne H standard sur $\mathbb{C}^{n+1}$; on en déduit par restriction à $\mathcal{S}$ une métrique h sur $\mathcal{S}$, et par passage au dual, une métrique h^* sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. La forme de Kähler de la métrique de Fubini-Study est la forme de Chern du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ muni de la métrique h^*. C'est aussi l'opposé de la forme de Chern du fibré $\mathcal{S}$ muni de la métrique h. Sur l'ouvert U_i où X_i est différent de 0, on a une section évidente s_i non nulle de $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ donnée au point x de coordonnées homogènes $(x_0, \ldots, x_n)$ par $s_i(x) = (x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i)$. Posant $z_i = x_0/x_i$, qui sont les coordonnées naturelles sur l'ouvert affine U_i, on trouve que $h(s_i) = H(s_i) = 1 + \sum_i \mid z_i \mid^2$ et donc la forme de Chern cherchée est donnée dans les coordonnées affines z_i par

$$\omega_{FS} = \frac{\iota}{2\pi} \partial\overline{\partial} log\,(1 + \sum_i \mid z_i \mid^2).$$

Exercice 4.19 *Montrer que c'est une forme positive. (Indication : Il suffit par un argument d'homogénéité de montrer le résultat en un seul point).*

Remarque 4.20 D'après le théorème 4.14, la classe de Kähler de la forme ω_{FS} est une classe entière

$$[\omega_{FS}] \in H^2(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \subset H^2(\mathbb{CP}^n, \mathbb{R}).$$

4.4.3 Caractérisation locale

La proposition suivante est extrêmement utile, en particulier pour la preuve des *identités kählériennes* (section 5.5).

Proposition 4.21 *Soit X une variété complexe de dimension n, et soit h une métrique kählérienne sur X. Alors au voisinage de chaque point x de X, il existe des coordonnées holomorphes $z_1, \ldots, z_n$ centrées en x telles que la matrice $h_{ij} = h(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j})$ de h dans ces coordonnées soit égale à $I_n + O(\sum_i |z_i|^2)$.*

Démonstration. Prenons des coordonnées holomorphes $z_1, \ldots, z_n$ centrées en x. On peut bien sûr, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, supposer que la matrice de h dans la base $\frac{\partial}{\partial z_i}$ est égale à I_n au point x où les coordonnées s'annulent. On a donc

$$h = \sum_i dz_i d\overline{z}_i + \sum_{i,j} \epsilon_{ij} dz_i d\overline{z}_j + O(|z|^2),$$

où la matrice ϵ_{ij} est une matrice hermitienne dont les coefficients sont des formes linéaires en les $z_i, \overline{z}_i$. Écrivons

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{hol} + \epsilon_{ij}^{antihol}$$

(décomposition en parties $\mathbb{C}$-linéaire et antilinéaire). Remarquons qu'on a évidemment

$$\epsilon_{ij}^{antihol} = \overline{\epsilon_{ji}^{hol}} \tag{22}$$

puisque ϵ_{ij} est hermitienne. La forme ω s'écrit au premier ordre au voisinage de x

$$\omega = \frac{\iota}{2}(\sum_i dz_i \wedge d\overline{z}_i + \sum_{i,j} \epsilon_{ij}^{hol} dz_i \wedge d\overline{z}_j + \sum_{i,j} \epsilon_{ij}^{antihol} dz_i \wedge d\overline{z}_j) + O(|z|^2).$$

Le fait que ω soit fermée au point x entraîne que la forme

$$\sum_{i,j} \epsilon_{ij}^{hol} dz_i \wedge d\overline{z}_j$$

est ∂-fermée au point x, et donc en fait partout puisque c'est une forme à coefficients linéaires. On a donc

$$\frac{\partial \epsilon_{ij}^{hol}}{\partial z_k} = \frac{\partial \epsilon_{kj}^{hol}}{\partial z_i}.$$

Cela entraîne qu'il existe des fonctions holomorphes $\phi_j(z_1, \ldots, z_n)$, que l'on peut supposer nulles en 0, telles que

$$\epsilon_{ij}^{hol} = \frac{\partial \phi_j}{\partial z_i}.$$

Posons $z'_i = z_i + \phi_i(z)$. Comme ϕ_i est nulle à l'ordre 1 en 0, les z'_i fournissent, quitte à restreindre le voisinage considéré, des coordonnées centrées en x. Il reste à voir que la métrique h est constante au premier ordre dans ces coordonnées. Mais on a

$$dz'_i = dz_i + \sum_k \frac{\partial \phi_i}{\partial z_k} dz_k = dz_i + \sum_k \epsilon_{ki}^{hol} dz_k.$$

Il vient donc

$$\sum_i dz'_i \wedge d\overline{z}'_i = \sum_i dz_i \wedge d\overline{z}_i + \sum_{i,k} \left(\epsilon_{ki}^{hol} dz_k \wedge d\overline{z}_i + \overline{\epsilon_{ki}^{hol}} dz_i \wedge d\overline{z}_k\right) + O(|z|^2)$$

$$= \sum_i dz_i \wedge d\overline{z}_i + \sum_{i,k} \epsilon_{ki}^{hol} dz_k \wedge d\overline{z}_i + \epsilon_{ik}^{antihol} dz_i \wedge d\overline{z}_k + O(|z|^2)$$

$$= \sum_i dz_i \wedge d\overline{z}_i + \sum_{i,k} \epsilon_{ki} dz_k \wedge d\overline{z}_i + O(|z|^2).$$

Or ceci est égal à $\frac{2}{\iota}\omega + O(|z|^2)$. On a donc

$$\omega = \frac{\iota}{2} \sum_i dz'_i \wedge d\overline{z}'_i + O(|z'|^2)$$

et la formule analogue pour h. La proposition 4.21 est donc montrée. ∎

5 Théorie de Hodge et théorèmes d'annulation

5.1 Métrique L^2

Soit X une variété différentiable compacte, munie d'une métrique g. On a alors une métrique $(\, , \,)$ sur chaque fibré vectoriel $\Omega^k_{X,\mathbb{R}}$: si $e_1, \ldots, e_n$ est une base orthonormée pour $(T_{X,x}, g_x)$ et e_i^* est la base duale, les $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$ forment une base orthonormée pour la métrique $(\, , \,)_x$ sur $\Omega^k_{X,x}$.

Supposons maintenant que X est orientée et compacte, et soit Vol la forme volume de X relative à g. La métrique L^2 sur l'espace $A^k(X)$ des formes différentielles sur X est définie par

$$(\alpha, \beta)_{L^2} = \int_X (\alpha, \beta) Vol, \tag{23}$$

où (α, β) est la fonction (continue dès que α, β et g le sont) $x \mapsto (\alpha_x, \beta_x)_x$ sur X.

Opérateur de Hodge. Soit $n = dimX$. Pour chaque $x \in X$, on a un isomorphisme naturel, donné par le produit extérieur à droite

$$p : \bigwedge^{n-k} \Omega_{X,x} \cong Hom(\bigwedge^{k} \Omega_{X,x}, \bigwedge^{n} \Omega_{X,x}),$$

où $\bigwedge^n \Omega_{X,x}$ est un espace vectoriel de dimension 1. Lorsque $\Omega_{X,x}$ est muni d'une métrique et est orienté, $\bigwedge^n \Omega_{X,x}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}$, grâce à la forme volume. D'autre part la métrique $(\, , \,)_x$ fournit aussi un isomorphisme

$$m : \bigwedge^{k} \Omega_{X,x} \cong Hom(\bigwedge^{k} \Omega_{X,x}, \mathbb{R}).$$

On peut donc définir l'opérateur

$$*_x = p^{-1} \circ m : \bigwedge^{k} \Omega_{X,x} \cong \bigwedge^{n-k} \Omega_{X,x}$$

qui varie différentiablement avec x lorsque g est différentiable et qui est de même classe que g.

Définition 5.1 *On notera $*$ l'isomorphisme de fibrés vectoriels*

$$* : \Omega^k_{X,\mathbb{R}} \cong \Omega^{n-k}_{X,\mathbb{R}}$$

ainsi construit. On notera également $*$ le morphisme induit au niveau des sections, c'est-à-dire des formes différentielles

$$* : A^k(X) \cong A^{n-k}(X).$$

L'opérateur $*$ est appelé opérateur de Hodge. Sa propriété essentielle (qui résulte de sa définition) est la suivante :

Lemme 5.2 *On a pour $\alpha, \beta \in A^k(X)$ l'égalité des n-formes*

$$(\alpha, \beta) Vol = \alpha \wedge *\beta,$$

et donc

$$(\alpha, \beta)_{L^2} = \int_X \alpha \wedge *\beta.$$

On peut faire la même construction avec l'opérateur $\overline{\partial}_E$ d'un fibré vectoriel E holomorphe sur une variété complexe X. Supposons que E et X sont munis d'une métrique hermitienne. Alors chaque fibré vectoriel $\Omega_X^{p,q} \otimes E$ est muni d'une métrique hermitienne. Or $\Omega_X^{n,n} = \Omega_{X,\mathbb{C}}^{2n}$ est trivialisé par la forme volume Vol. Donc $\Omega_X^{0,q} \otimes E$ et $\Omega_X^{n,n-q} \otimes E^*$ sont naturellement duaux comme fibrés vectoriels complexes. D'autre part, on a un isomorphisme $\mathbb{C}$-antilinéaire donné par la métrique hermitienne

$$\Omega_X^{0,q} \otimes E \mapsto (\Omega_X^{0,q} \otimes E)^*.$$

On en déduit un isomorphisme antilinéaire

$$*_E : \Omega_X^{0,q} \otimes E \mapsto \Omega_X^{n,n-q} \otimes E^*.$$

Remarque 5.3 Le fibré $\Omega_X^{n,n-q} \otimes E^*$ est bien sûr isomorphe à $\Omega_X^{0,n-q} \otimes \Omega_X^{n,0} \otimes E^*$. Le fibré $\Omega_X^{n,0} = \bigwedge^n \Omega_X^{1,0}$ est un fibré vectoriel holomorphe de rang 1, appelé le fibré canonique de X et noté K_X.

5.2 Adjoints formels et Laplaciens

Opérateurs adjoints formels. Soit $A^k(X)$ l'espace des formes de classe C^∞ sur une variété X munie d'une métrique de classe C^∞. Lorsque X est orientée, on peut définir un opérateur

$$d^* : A^k(X) \mapsto A^{k-1}(X)$$

par la formule $d^* = (-1)^k *^{-1} d *$ sur $A^k(X)$. Cet opérateur est l'adjoint formel de d pour la métrique L^2 sur les formes au sens suivant : supposant que X est compacte, ou sinon considérant seulement des intégrales de formes à support compact, on a :

Lemme 5.4 *L'opérateur d^* satisfait la relation formelle d'adjonction*

$$(\alpha, d^*\beta)_{L^2} = (d\alpha, \beta)_{L^2} \tag{24}$$

pour toutes formes β de degré k et α de degré $k-1$ sur X.

C'est une conséquence immédiate de la formule de Stokes. En effet, on a par définition de d^*

$$(\alpha, d^*\beta)_{L^2} = \int_X (-1)^k \alpha \wedge d(*\beta),$$

ce qui par la formule de Stokes est aussi égal à $\int_X d\alpha \wedge *\beta = (d\alpha, \beta)_{L^2}$. ∎

Adjoints des opérateurs $\overline{\partial}$. Si X est une variété complexe, on a les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ définis sur les formes différentielles complexes, qui satisfont la relation $d = \partial + \overline{\partial}$. On dispose aussi de la métrique hermitienne L^2 sur les formes différentielles à valeurs complexes, et de l'opérateur $*$ étendu de façon $\mathbb{C}$-linéaire aux formes à valeurs complexes. L'opérateur $*$ satisfait alors pour les métriques hermitiennes ponctuelles la relation

$$(\alpha, \beta)Vol = \alpha \wedge *\overline{\beta},$$

et il envoie donc $A_X^{p,q}$ sur $A_X^{n-q,n-p}$. On montre alors avec le même argument que pour le lemme 5.4 :

Lemme 5.5 *Les opérateurs* $\partial^* = -*\overline{\partial}*$ *et* $\overline{\partial}^* = -*\partial*$ *sont des adjoints formels de* ∂ *et* $\overline{\partial}$ *respectivement, pour la métrique hermitienne* L^2 *sur les formes complexes.*

On peut de même définir un opérateur adjoint de $\overline{\partial}_E$ pour un fibré vectoriel holomorphe E muni d'une métrique hermitienne sur une variété complexe munie d'une métrique hermitienne :

Si X est compacte, soit $(\ ,\ )_{L^2}$ la métrique hermitienne sur l'espace $A^{0,q}(E)$ des formes différentielles de type $(0,q)$, définie par

$$(\alpha,\beta)_{L^2} = \int_X (\alpha,\beta)Vol.$$

On a clairement, pour $x \in X$ et $\alpha_x, \beta_x \in \Omega^{0,q}_{X,x} \otimes E_x$

$$(\alpha_x,\beta_x)_x Vol = \alpha_x \wedge *_E\beta_x,$$

où dans le terme de droite, on fait le produit extérieur sur les formes et on utilise la contraction entre E et $K_X \otimes E^*$, à valeurs dans K_X. Il en résulte immédiatement que, pour $\alpha, \beta \in A^{0,q}(E)$, on a

$$(\alpha,\beta)_{L^2} = \int_X \alpha \wedge *_E\beta.$$

Considérons maintenant l'opérateur

$$\overline{\partial}^*_E : A^{0,q}(E) \mapsto A^{0,q-1}(E)$$

défini par $\overline{\partial}^*_E = (-1)^q *_E^{-1} \circ \overline{\partial}_{K_X\otimes E^*} \circ *_E$. On a :

Lemme 5.6 *L'opérateur* $\overline{\partial}^*_E$ *est l'adjoint formel de* $\overline{\partial}_E$.

Démonstration. On veut montrer que

$$(\overline{\partial}_E\alpha,\beta)_{L^2} = (-1)^{d^\circ\beta}(\alpha, *_E^{-1} \circ \overline{\partial}_{K_X\otimes E^*} \circ *_E\beta)_{L^2},$$

c'est-à-dire

$$\int_X \overline{\partial}_E\alpha \wedge *_E\beta = (-1)^{d^\circ\beta}\int_X \alpha \wedge *_E *_E^{-1} \overline{\partial}_{K_X\otimes E^*} *_E \beta. \tag{25}$$

Mais on a $\int_X \overline{\partial}(\alpha \wedge *_E\beta) = 0$ et

$$\overline{\partial}(\alpha \wedge *_E\beta) = \overline{\partial}_E\alpha \wedge *_E\beta + (-1)^{d^\circ\alpha}\alpha \wedge \overline{\partial}_{K_X\otimes E^*} *_E \beta.$$

Il vient donc

$$\int_X \overline{\partial}_E\alpha \wedge *_E\beta = -\int_X (-1)^{d^\circ\alpha}\alpha \wedge \overline{\partial}_{K_X\otimes E^*} *_E \beta.$$

L'égalité (25) résulte donc du fait que $d^\circ\alpha + 1 = d^\circ\beta$. ■

Remarque 5.7 *On peut en particulier prendre pour fibré* E *l'un des fibrés holomorphes* Ω^p_X *muni de sa métrique hermitienne induite. Les opérateurs* $\overline{\partial}_E$ *et* $\overline{\partial}^*_E$ *ne coïncident alors avec les opérateurs* $\overline{\partial}$, $\overline{\partial}^*$*, restreints aux formes de type* (p,q)*, qu'à un coefficient près. Par exemple, à cause de la règle de Leibniz, on a* $\overline{\partial}_E = (-1)^p\overline{\partial}$ *sur* $A^{p,q}(X) = A^{0,q}(\Omega^p_X)$*. D'autre part, on a* $\overline{\partial}^* = (-1)^p\frac{1}{2}\overline{\partial}^*_E$*, le coefficient 2 provenant de la différence des métriques utilisées.*

5.2.1 Laplaciens

Pour une variété riemannienne M, on note Δ l'opérateur $dd^* + d^*d$ qui agit pour chaque k sur les formes différentielles de classe C^∞ et de degré k. Cet opérateur est appelé le laplacien associé à d.

Pour une variété complexe X munie d'une métrique hermitienne, on notera Δ_∂ et $\Delta_{\overline{\partial}}$ les laplaciens associés aux opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ respectivement, c'est-à-dire

$$\Delta_\partial = \partial\partial^* + \partial^*\partial, \quad \Delta_{\overline{\partial}} = \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}.$$

De même, si E est un fibré vectoriel holomorphe sur X, E et X étant munis de métriques hermitiennes, on note Δ_E le laplacien associé à l'opérateur $\overline{\partial}_E$, $\Delta_E = \overline{\partial}_E\overline{\partial}_E^* + \overline{\partial}_E^*\overline{\partial}_E$.

Lemme 5.8 *Si X est compacte, on a l'égalité*

$$(\alpha, \Delta\alpha)_{L^2} = (d\alpha, d\alpha)_{L^2} + (d^*\alpha, d^*\alpha)_{L^2}$$

et les égalités semblables pour les autres laplaciens introduits ci-dessus.

En effet, on a

$$(\alpha, \Delta\alpha)_{L^2} = (\alpha, dd^*\alpha)_{L^2} + (\alpha, d^*d\alpha)_{L^2}$$

et ceci est égal à $(d\alpha, d\alpha)_{L^2} + (d^*\alpha, d^*\alpha)_{L^2}$ par la propriété d'adjonction (24). ∎

Corollaire 5.9 *Sur une variété compacte, on a $Ker\,\Delta = Ker\,d \cap Ker\,d^*$ et les égalités semblables pour les trois autres laplaciens.*

En effet, si $\Delta\alpha = 0$ on a $(\alpha, \Delta\alpha)_{L^2} = (d\alpha, d\alpha)_{L^2} + (d^*\alpha, d^*\alpha)_{L^2} = 0$, et donc $(d\alpha, d\alpha)_{L^2} = 0$, $(d^*\alpha, d^*\alpha)_{L^2} = 0$. Donc $d\alpha = 0$, $d^*\alpha = 0$. L'autre inclusion est triviale. ∎

Définition 5.10 *Une forme harmonique (ou Δ-harmonique) est une forme annulée par le laplacien Δ, (ou de façon équivalente dans le cas compact qui est annulée par d et d^*). On peut définir de même les formes $\Delta_{\overline{\partial}}$-harmoniques ou les $(0, q)$-formes Δ_E-harmoniques à coefficients dans E.*

5.3 Opérateurs elliptiques et théorème de Hodge

5.3.1 Symboles des opérateurs différentiels

Soient E et F deux fibrés vectoriels (réels ou complexes) de classe C^∞ sur une variété M. Soit

$$P : \mathcal{C}^\infty(E) \mapsto \mathcal{C}^\infty(F)$$

un morphisme de faisceaux ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)-linéaire.

Définition 5.11 *P est un opérateur différentiel d'ordre k si dans les ouverts U munis de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ et de trivialisations*

$$E_{|U} \cong U \times \mathbb{R}^p, \quad F_{|U} \cong U \times \mathbb{R}^q,$$

on a $P((\alpha_1,\ldots,\alpha_p))=(\beta_1,\ldots,\beta_q)$ *avec*

$$\beta_i=\sum_{I,j}P_{I,i,j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_I},$$

où les coefficients $P_{I,i,j}$ *sont de classe* C^∞*, nuls pour* $\mid I\mid> k$ *avec au moins un coefficient* $P_{I,i,j}$ *non nul pour* $\mid I\mid= k$*.*

On vérifie aisément que cette condition ne dépend pas du choix de coordonnées et de trivialisations.

Soit P un opérateur différentiel d'ordre k, et dans chaque ouvert U comme ci-dessus, définissons la matrice P^k_{ji} à coefficients dans l'espace des opérateurs différentiels par

$$P^k_{ij}=\sum_{|I|=k}P_{I,i,j}\frac{\partial}{\partial x_I}.$$

On voit facilement, en appliquant la règle de dérivation des fonctions composées et la règle de Leibniz que par un changement de coordonnées, les coefficients de la matrice P^k se transforment comme les sections de la k-ième puissance symétrique du fibré tangent T_U leur correspondant par

$$\frac{\partial}{\partial x_I}\mapsto\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}.$$

De même, par un changement de trivialisation des fibrés E et F, la matrice P^k_{ij} se transforme comme une section de $Hom\,(E,F)$. Dans les deux cas, le point est que tous les termes (opérateurs différentiels) apparaissant dans la nouvelle expression de P lors d'un changement de coordonnées ou de trivialisations, faisant intervenir les dérivées de la matrice jacobienne ou les dérivées de la matrice de changement de base, sont d'ordre inférieur à k.

Définition 5.12 *La section* σ_P *de* $Hom\,(E,F)\otimes S^kT_X$ *donnée par les* P_k *dans les ouverts d'une trivialisation est appelée le symbole de l'opérateur* P*.*

On peut voir aussi σ_P comme fournissant en chaque point $m\in M$ une application $\sigma_{P,m}$ homogène de degré k de $\Omega_{M,m}$ dans $Hom\,(E_m,F_m)$.

Définition 5.13 *On dit qu'un opérateur différentiel est elliptique si pour tout* $m\in M$ *et* $\alpha_m\neq 0$ *dans* $\Omega_{M,m}$*, l'homomorphisme* $\sigma_{P,m}(\alpha):E_m\mapsto F_m$ *est injectif.*

5.3.2 Symbole du laplacien

Soit (M,g) une variété riemannienne et soit $\Delta=dd^*+d^*d$ le laplacien associé à g, agissant sur les formes différentielles. C'est évidemment un opérateur différentiel d'ordre 2, car d et d^* sont des opérateurs différentiels d'ordre 1. On a :

Lemme 5.14 *Le symbole* σ_Δ *du laplacien est décrit par*

$$\sigma_\Delta(\alpha)(\omega)=-\mid\alpha\mid^2\omega. \tag{26}$$

Ici, $| \alpha |^2$ est la fonction sur M qui vaut $| \alpha_x |^2 := (\alpha_x, \alpha_x)_x$ au point x.

Démonstration. Il suffit de le montrer localement. D'autre part, si $m \in M$, l'opérateur différentiel $d^* = \pm * d*$ est la somme d'un opérateur différentiel d'ordre 0, qui fait intervenir les dérivées de la métrique, et d'un opérateur d'ordre 1, qui ne fait intervenir la métrique qu'à l'ordre 0. Il en résulte immédiatement que les termes d'ordre 2 dans l'expression du laplacien ne dépendent de la métrique qu'à l'ordre 0. Donc il suffit de montrer (26) pour la métrique constante.

Pour la métrique à coefficients constants, les formes $*dx_I$ sont à coefficients constants et donc annulées par d. Soit alors $\omega = \sum_I f_i dx_I$ une forme différentielle ; on a $\Delta\omega = (-1)^q (d *^{-1} d * - *^{-1} d * d)\omega$, $q = d^\circ \omega$. Or

$$d\omega = \sum_{i,I} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I, \quad *d\omega = \sum_{i,I} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} * (dx_i \wedge dx_I)$$

et donc

$$*^{-1} d * d\omega = \sum_{k,i,I} \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i \partial x_k} *^{-1} (dx_k \wedge *(dx_i \wedge dx_I)).$$

De même, on trouve

$$d *^{-1} d * \omega = \sum_{k,i,I} \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i \partial x_k} dx_k \wedge *^{-1}(dx_i \wedge *dx_I).$$

Il vient donc

$$\Delta_d \omega = (-1)^q (\sum_{I,i,k} \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i \partial x_k} (*^{-1}(dx_k \wedge *(dx_i \wedge dx_I)) - dx_k \wedge *^{-1}(dx_i \wedge *dx_I))).$$

Supposons que la métrique soit la métrique standard $\sum_i dx_i^2$. On vérifie immédiatement que $*^{-1}(dx_i \wedge dx_I)$ est égal à $(-1)^{q+1} Int(\frac{\partial}{\partial x_i})(dx_I)$, où le produit intérieur $Int(u)(\alpha)$ pour u un vecteur tangent et α une k-forme différentielle est la $k-1$-forme définie par

$$Int(u)(\alpha)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \alpha(u, v_1, \ldots, v_{k-1}).$$

Or le produit intérieur par $\frac{\partial}{\partial x_i}$ anticommute avec le produit extérieur par dx_k lorsque $i \neq k$, tandis que, pour $k = i$, on a

$$Int(\frac{\partial}{\partial x_i}) \circ (dx_i \wedge) + (dx_i \wedge) \circ Int(\frac{\partial}{\partial x_i}) = Id.$$

On en déduit immédiatement que, pour la métrique standard,

$$\Delta\omega = -\sum_i \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i^2} dx_I,$$

ce qui montre (26) puisque $-\sum_i (\frac{\partial}{\partial x_i})^2 \in S^2 T_{M,m}$ est exactement l'application homogène de degré deux $\alpha \mapsto - | \alpha |^2$ sur $\Omega_{M,m}$. ∎

On a des résultats semblables pour les laplaciens Δ_∂, $\Delta_{\overline{\partial}}$, Δ_E introduits ci-dessus. Par exemple on a :

Lemme 5.15 *Les symboles de Δ_∂ et $\Delta_{\overline{\partial}}$ sont égaux à*

$$\xi \mapsto \frac{-1}{2} \mid \xi \mid^2 Id$$

agissant sur Ω_X^k. Le symbole de Δ_E est égal à

$$\xi \mapsto - \mid \xi \mid^2 Id$$

agissant sur $\Omega^{0,q} \otimes E$.

Corollaire 5.16 *Les laplaciens Δ, Δ_∂, $\Delta_{\overline{\partial}}$, Δ_E sont des opérateurs elliptiques.*

5.4 Le théorème fondamental.

Soient M une variété, E, un fibré de classe C^∞ sur M et

$$P : \mathcal{C}^\infty(E) \mapsto \mathcal{C}^\infty(E)$$

un opérateur différentiel. Supposons que E est muni d'une métrique et que M est compacte orientée munie d'une forme volume Vol. On dispose alors de la métrique L^2 sur l'espace des sections $C^\infty(M,E)$. On dira que P est autoadjoint s'il satisfait :

$$(\alpha, P\beta)_{L^2} = (P\alpha, \beta)_{L^2}, \ \forall \alpha \in C^\infty(M,F), \ \beta \in C^\infty(M,E), \tag{27}$$

où la métrique L^2 est définie comme en (23).

Le théorème essentiel concernant les opérateurs différentiels elliptiques autoadjoints, et que nous utiliserons sans démonstration est le suivant :

Théorème 5.17 *(Hodge) Soit $P : \mathcal{C}^\infty(E) \mapsto \mathcal{C}^\infty(E)$ un opérateur différentiel elliptique autoadjoint sur une variété compacte orientée M. Alors $Ker\, P \subset C^\infty(M,E)$ est de dimension finie, $Im\, P := P(C^\infty(M,E)) \subset C^\infty(M,E)$ est fermé et de codimension finie, et l'on a une décomposition en somme directe orthogonale (pour la métrique L^2)*

$$C^\infty(M,E) = Ker\, P \oplus Im\, P.$$

Notons que certainement par la propriété d'autoadjonction (27), $Ker\, P$ et $Im\, P$ sont orthogonaux relativement à la métrique L^2. En dimension finie, la décomposition en somme directe orthogonale ci-dessus est évidente. Mais les espaces de sections considérés ici ne sont pas de dimension finie. Ce ne sont même pas des espaces de Hilbert pour la métrique L^2. La principale étape dans la démonstration de ce théorème consiste à montrer qu'une égalité au sens des distributions $P\alpha = \beta$, avec β de classe C^∞, entraîne que α est de classe C^∞.

5.4.1 Formes harmoniques et cohomologie.

Une première conséquence du théorème 5.17 est la suivante : Supposons que (X, g) est une variété riemannienne orientée.

Théorème 5.18 *Soit $\mathcal{H}^k$ l'espace vectoriel des formes différentielles Δ-harmoniques de degré k. Alors l'application naturelle*

$$\mathcal{H}^k \mapsto H^k(X, \mathbb{R}) \tag{28}$$

qui à la forme harmonique α associe la classe de la forme fermée α dans $H^k(X,\mathbb{R})$ est un isomorphisme.

Démonstration. L'opérateur Δ est autoadjoint et elliptique. Donc le théorème 5.17 fournit la décomposition

$$A^k(X) = \mathcal{H}^k \oplus \Delta(A^k(X)).$$

Soit $\beta \in A^k(X)$ une forme fermée et écrivons $\beta = \alpha + \Delta\gamma$ avec α harmonique. On a donc $\beta = \alpha + dd^*\gamma + d^*d\gamma$. Comme β, α et $dd^*\gamma$ sont fermées, on en déduit que la forme $d^*d\gamma$ est à la fois annulée par d et dans l'image de d^*. Donc elle est nulle et $\beta = \alpha$ modulo une forme exacte. La flèche (28) est donc surjective.

D'autre part soit β une forme harmonique, et supposons que β soit exacte. Alors β est à la fois annulée par d^* (d'après le corollaire 5.9) et dans l'image de d. Donc β est nulle. La flèche (28) est donc injective. ■

En utilisant la cohomologie de Dolbeault d'un fibré vectoriel holomorphe E sur une variété complexe X, on a le résultat analogue pour les groupes de cohomologie $H^q(X, \mathcal{E})$ à valeurs dans le faisceau $\mathcal{E}$ des sections holomorphes de E, que l'on a identifiés dans le corollaire 4.13 aux groupes

$$\frac{Ker\,(\overline{\partial} : A^{0,q}(E) \to A^{0,q+1}(E))}{Im\,(\overline{\partial} : A^{0,q-1}(E) \to A^{0,q}(E))}.$$

Théorème 5.19 *Soit E un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur une variété complexe compacte X munie d'une métrique hermitienne. Alors si $\mathcal{H}^{0,q}(E)$ est l'espace des formes harmoniques, c'est-à-dire annulées par Δ_E, de type $(0,q)$ à coefficients dans E, l'application naturelle*

$$\mathcal{H}^{0,q}(E) \mapsto H^q(X, \mathcal{E})$$

qui à une forme harmonique α associe la classe de la forme $\overline{\partial}$-fermée α, est un isomorphisme.

5.5 Identités kählériennes

Soit X une variété complexe munie d'une métrique kählérienne de forme de Kähler ω. On dispose alors de deux opérateurs différentiels d'ordre 0, (c'est-à-dire $\mathcal{C}^\infty$-linéaires) agissant sur les formes différentielles sur X.

L'opérateur L. C'est tout simplement l'opérateur de cup-produit par la forme de Kähler ω :

$$L\alpha = \omega \wedge \alpha.$$

L'opérateur Λ. C'est l'opérateur adjoint formel de L relativement à la métrique L^2 sur les formes. Comme on a :

$$(\alpha, \beta)_{L^2} = \int_X \alpha \wedge *\beta,$$

on obtient

$$(L\alpha, \beta) = \int_X \omega \wedge \alpha \wedge *\beta = \int_X \alpha \wedge \omega \wedge *\beta = (\alpha, \Lambda\beta)_{L^2},$$

où $\Lambda\beta := *^{-1} \circ L \circ *$.

Identités kählériennes.

Proposition 5.20 *On a les identités :*

$$[\Lambda, \overline{\partial}] = -i\partial^*, \ [\Lambda, \partial] = i\overline{\partial}^*. \tag{29}$$

Démonstration. Rappelons que par le lemme 5.5, on a $\partial^* = -*\circ\overline{\partial}\circ *$. La première égalité se résume donc à

$$[\Lambda, \overline{\partial}] = i * \circ\overline{\partial} \circ *.$$

Notons aussi que grâce à la caractérisation des métriques kählériennes données dans la proposition 4.21, on peut supposer que la métrique est en fait la métrique hermitienne standard sur $\mathbb{C}^n$. En effet, les opérateurs L et Λ étant d'ordre 0, et les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ étant d'ordre 1, les coefficients de la métrique n'apparaissent dans les crochets ci-dessus qu'à travers leurs dérivées du premier ordre. Or on a vu qu'au premier ordre la métrique est la métrique standard dans des coordonnées adéquates. On note également que sur $\mathbb{C}^n$ muni de sa métrique standard, tous les opérateurs entrant dans les identités ci-dessus sont des opérateurs d'ordre 1 qui annulent les formes à coefficients constants. Il suffit donc de montrer les égalités des symboles des opérateurs d'ordre 1 entrant dans les identités (29).

Finalement le symbole de $\overline{\partial} : \mathcal{A}_X^{p,q} \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}$ est l'application

$$\begin{aligned} \Omega_{X,\mathbb{C}} &\to Hom(\Omega_X^{p,q}, \Omega_X^{p,q+1}) \\ \eta &\mapsto \eta^{0,1} \wedge . \end{aligned}$$

En effet,

$$\overline{\partial}\Big(\sum_{I,J} f_{I,J}\, dz_I \wedge d\overline{z}_J\Big) = \sum_{i,I,J} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \overline{z}_i}\, d\overline{z}_i \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

de sorte que la section de $T_X \otimes Hom(\Omega_X^{p,q}, \Omega_X^{p,q+1})$ correspondante est égale à $\sum_i (\frac{\partial}{\partial \overline{z}_i}) \otimes (d\overline{z}_i \wedge)$. La preuve de la première identité résulte donc du lemme 5.21 ci-dessous, et la seconde s'en déduit par conjugaison. ∎

Lemme 5.21 *(cf [12], Lemme 6.6) Soit η une section du fibré $\Omega_X^{0,1}$. On a l'égalité*

$$[\Lambda, (\eta\wedge)] = i * (\eta\wedge) * \in Hom(\Omega_X^{p,q}, \Omega_X^{p-1,q}).$$

5.5.1 Applications

On déduit des identités kählériennes le résultat suivant :

Théorème 5.22 *Sur une variété kählérienne (X, ω), les laplaciens Δ, $\Delta_{\overline{\partial}}$, Δ_∂ satisfont les relations :*

$$\Delta = 2\Delta_{\overline{\partial}} = 2\Delta_\partial.$$

Démonstration. On a

$$\Delta = (\partial + \overline{\partial})(\partial^* + \overline{\partial}^*) + (\partial^* + \overline{\partial}^*)(\partial + \overline{\partial}).$$

Par la proposition 5.20 ceci est égal à

$$(\partial + \overline{\partial})(\partial^* - i[\Lambda, \partial]) + (\partial^* - i[\Lambda, \partial])(\partial + \overline{\partial})$$

$$= \partial\partial^* + \overline{\partial}\partial^* + i\overline{\partial}\partial\Lambda - i\overline{\partial}\Lambda\partial + \partial^*\partial + \partial^*\overline{\partial} - i\Lambda\partial\overline{\partial} + i\partial\Lambda\overline{\partial}.$$

En écrivant $\partial^* = i[\Lambda, \overline{\partial}]$ on obtient d'autre part

$$\partial^*\overline{\partial} = -i\overline{\partial}\Lambda\overline{\partial} = -\overline{\partial}\partial^*.$$

Donc

$$\Delta = \Delta_\partial + i\partial[\Lambda, \overline{\partial}] + i[\Lambda, \overline{\partial}]\partial = 2\Delta_\partial.$$

L'autre égalité se montre de même. ■

Corollaire 5.23 *Sur une variété kählérienne (X, ω), le laplacien Δ est bihomogène, c'est-à-dire préserve la décomposition des formes en type :*

$$\Delta(A^{p,q}(X)) \subset A^{p,q}(X).$$

En effet, c'est le cas pour $\Delta_{\overline{\partial}}$.

Corollaire 5.24 *Si une k-forme $\alpha = \sum_{p+q=k} \alpha^{p,q}$ est Δ-harmonique, chacune de ses composantes $\alpha^{p,q}$ est Δ-harmonique, et donc aussi $\Delta_{\overline{\partial}}$-harmonique.*

Corollaire 5.25 *Si X est kählérienne et compacte, toute classe de cohomologie de degré k admet une décomposition*

$$\alpha = \sum_{p+q=k} \alpha^{p,q},$$

où $\alpha^{p,q}$ est une classe de cohomologie de type (p, q), c'est-à-dire est représentable par une forme fermée de type (p, q).

En effet, par le théorème 5.18, toute classe est représentable par une forme harmonique, dont les composantes de type (p, q) sont aussi harmoniques, et en particulier fermées. ■

Rappelons que si X est compacte, par le théorème 5.19, l'espace des formes de type (p, q) $\Delta_{\overline{\partial}}$-harmoniques s'identifie naturellement au groupe de cohomologie de Dolbeault $H^q(X, \Omega_X^p)$.

On va maintenant montrer l'unicité de la décomposition d'une classe de cohomologie en somme de classes de type (p, q). Montrons tout d'abord le résultat suivant :

Proposition 5.26 *Soit α une forme fermée de type (p, q). Alors α est aussi $\overline{\partial}$-fermée et le représentant harmonique pour Δ de sa classe de cohomologie est égal au représentant harmonique pour $\Delta_{\overline{\partial}}$ de sa classe de cohomologie de Dolbeault, et donc est de type (p, q).*

Démonstration. Le premier énoncé est évident. D'autre part, soit $\beta^{p,q}$ le représentant harmonique de la classe de cohomologie de Dolbeault de α dans $H^q(X, \Omega_X^p)$:

$$\alpha = \beta^{p,q} + \overline{\partial}\phi,$$

où ϕ est de type $(p, q-1)$. La forme $\alpha - \beta^{p,q}$ est donc de type (p, q), d-fermée (puisque $\beta^{p,q}$ l'est par l'égalité des laplaciens), et $\overline{\partial}$-exacte. Pour conclure que $\beta = \beta^{p,q}$ il suffit maintenant de savoir que la forme $\alpha - \beta^{p,q}$ est d-exacte. C'est le contenu du "lemme $\partial\overline{\partial}$" (Proposition 5.29 ci-dessous). ■

Corollaire 5.27 *La décomposition d'une classe de cohomologie en composantes de type (p,q) est unique.*

Démonstration. Supposons que $\sum_{p+q=k}\alpha^{p,q}$ est exacte, où chaque $\alpha^{p,q}$ est fermée. Alors le représentant harmonique de $\sum_{p+q=k}\alpha^{p,q}$ est nul. Or le représentant harmonique $\gamma_{p,q}$ de chaque $\alpha^{p,q}$ est de type (p,q) par la preuve de la proposition 5.26. L'égalité $\sum_{p+q=k}\gamma_{p,q} = 0$ entraîne donc que chaque $\gamma_{p,q}$ est nul, c'est-à-dire que chaque forme $\alpha^{p,q}$ est exacte. ■

En conclusion, on a montré le théorème de décomposition de Hodge.

Théorème 5.28 *Si X est compacte et kählérienne, on a une décomposition canonique*

$$H^k(X,\mathbb{C}) = \oplus_{p+q=k}H^{p,q}(X),$$

où $H^{p,q}(X)$ est l'ensemble des classes de cohomologie de type (p,q), et est canoniquement isomorphe à $H^q(X,\Omega_X^p)$.

Le lemme $\partial\overline{\partial}$.

Proposition 5.29 *Si X est kählérienne compacte, une forme β de type (p,q) fermée et $\overline{\partial}$-exacte sur X s'écrit sous la forme $\partial\overline{\partial}\psi$, où ψ est de type $(p-1,q-1)$. En particulier, β est d-exacte. On peut échanger dans cet énoncé les rôles de d et $\overline{\partial}$.*

Démonstration. Ecrivons

$$\beta = \overline{\partial}\phi$$

avec $\phi \in A_X^{p,q-1}$. La forme ϕ admet maintenant la décomposition relativement au laplacien Δ_∂ :

$$\phi = \eta + \partial\partial^*\mu + \partial^*\partial\mu,$$

où η est Δ_∂-harmonique. Comme $\Delta_\partial = \Delta_{\overline{\partial}}$, on a $\overline{\partial}\eta = 0$ et on obtient donc

$$\beta = \overline{\partial}\partial\partial^*\mu + \overline{\partial}\partial^*\partial\mu.$$

Rappelons maintenant l'identité kählérienne

$$[\Lambda,\overline{\partial}] = \Lambda\overline{\partial} - \overline{\partial}\Lambda == -i\partial^*.$$

Il en résulte que

$$-i\overline{\partial}\partial^* = \overline{\partial}\Lambda\overline{\partial},\ -i\partial^*\overline{\partial} = -\overline{\partial}\Lambda\overline{\partial}.$$

En d'autres termes, ∂^* et $\overline{\partial}$ anticommutent, et on conclut que

$$\beta = \overline{\partial}\partial\partial^*\mu - \partial^*\overline{\partial}\partial\mu.$$

Or β et $\overline{\partial}\partial\partial^*\mu$ sont ∂-fermées, tandis que $\partial^*\overline{\partial}\partial\mu$ est dans l'image de ∂^*. Il en résulte que $\partial^*\overline{\partial}\partial\mu = 0$, et que

$$\beta = \overline{\partial}\partial\partial^*\mu.$$

■

5.6 Théorèmes d'annulation

Connexion de Chern. On utilisera dans cette section un outil précieux, la connexion de Chern, qui permet de définir deux laplaciens sur un fibré vectoriel holomorphe muni d'une métrique hermitienne. Soit E un fibré vectoriel hermitien sur une variété complexe X, et soit h une métrique hermitienne sur E. On a déjà défini l'opérateur $\overline{\partial}_E$ agissant sur les formes de type $(0,q)$ à valeurs dans E. On peut plus généralement définir l'opérateur $\overline{\partial}_E$ agissant sur les (p,q)-formes à coefficients dans E, c'est-à-dire les sections de $\mathcal{A}_X^{p,q} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$, en observant qu'on peut les voir comme les $(0,q)$-formes à valeurs dans le fibré vectoriel holomorphe $\Omega_X^p \otimes E$.

On va définir une connexion ∇ sur E, dite de Chern, c'est-à-dire un opérateur différentiel

$$\nabla : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{A}_X^1(E)$$

satisfaisant la règle de Leibniz

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma$$

pour f une fonction de classe C^∞ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et σ une section de classe C^∞ de E. Cet opérateur ∇ se décompose en $\nabla = \nabla' + \nabla''$, suivant la décomposition des 1-formes en formes de type $(1,0)$ et formes de type $(0,1)$.

Proposition 5.30 *Il existe une unique connexion ∇ sur E satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

1. $\nabla'' = \overline{\partial}_E$.
2. *Pour toutes sections locales σ, σ' de classe C^∞ de E, on a :*

$$d(h(\sigma,\sigma')) = h(\sigma,\nabla\sigma') + h(\nabla\sigma,\sigma'). \tag{30}$$

Dans l'égalité (30), $\nabla\sigma'$ est une 1-forme à coefficients dans E. On utilise la sesquilinéarité de h pour poser

$$h(\eta\otimes\sigma,\sigma'') = \eta h(\sigma,\sigma''),\ h(\sigma,\eta\otimes\sigma'') = \overline{\eta}h(\sigma,\sigma''),$$

pour η une 1-forme à valeurs complexes et σ, σ'' des sections de E.

Démonstration. La condition 1 détermine la partie de type $(0,1)$ de ∇, c'est-à-dire ∇''. En considérant la partie de $(1,0)$ dans (30), on obtient :

$$\partial(h(\sigma,\sigma')) = h(\sigma,\nabla''\sigma') + h(\nabla'\sigma,\sigma'),$$

ou encore :

$$h(\nabla'\sigma,\sigma') = \partial(h(\sigma,\sigma')) - h(\sigma,\overline{\partial}_E\sigma'). \tag{31}$$

Comme h est non dégénérée, ceci détermine $\nabla'\sigma$, d'où l'unicité.

On vérifie que ∇' étant définie par (31), $\nabla = \nabla' + \overline{\partial}_E$ satisfait les conditions voulues, d'où l'existence. ∎

On dit qu'un fibré en droites holomorphe $\mathcal{L}$ sur une variété complexe X est positif s'il possède une métrique h telle que la form de Chern ω_h soit positive (donc une forme de Kähler). Le théorème d'annulation de Kodaira est le suivant.

Théorème 5.31 *Supposons que X est compacte de dimension n et que $\mathcal{L}$ est positif sur X. Alors*
$$H^q(X, K_X \otimes \mathcal{L}) = 0, \forall q > 0.$$

Rappelons ici que le fibré canonique K_X est le fibré en droites holomorphes $\bigwedge^n \Omega_X$, où Ω_X est considéré comme un fibré vectoriel holomorphe de rang n sur X.

Ce théorème admet la généralisation suivante, qui sera utilisé dans la preuve du théorème de restriction de Lefschetz (cf section 8.3). Cette généralisation est due à Akizuki et Nakano.

Théorème 5.32 *Sous les mêmes hypothèses, on a*

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{L}) = 0, \forall p, q \text{ tels que } p + q > n.$$

Démonstration. Soit h une métrique sur $\mathcal{L}$ de forme de Chern ω_h positive. On prend ω_h comme forme de Kähler sur X. Ces métriques sur $\mathcal{L}$ et X fournissent un laplacien $\Delta_{\mathcal{L}}$ agissant sur $A_X^{p,q}(\mathcal{L})$, associé à l'opérateur $\overline{\partial} : \mathcal{A}_X^{p,q}(\mathcal{L}) \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}(\mathcal{L})$.

Par ailleurs, la proposition 5.30 nous fournit une connexion ∇ sur $\mathcal{L}$, dont la partie ∇' de type $(1,0)$ satisfait la règle de Leibniz relativement à l'opérateur ∂. En appliquant systématiquement la règle de Leibniz relativement à l'opérateur ∂ sur les formes, on en déduit un opérateur différentiel du premier ordre $\nabla' : \mathcal{A}_X^{p,q}(\mathcal{L}) \to \mathcal{A}_X^{p+1,q}(\mathcal{L})$ agissant sur les (p,q)-formes à valeurs dans $\mathcal{L}$.

On associe comme plus haut à cet opérateur un laplacien

$$\Delta'_{\mathcal{L}} = \nabla'\nabla'^* + \nabla'^*\nabla', \; \nabla'^* = - * \nabla' *$$

agissant sur $A_X^{p,q}(\mathcal{L})$

Le théorème 5.19 appliqué à $\Omega_X^p \otimes \mathcal{L}$ montre qu'il suffit de prouver que toute forme $\Delta_{\mathcal{L}}$-harmonique dans $A_X^{p,q}(\mathcal{L})$ est nulle pour $p + q > n = dim_{\mathbb{C}} X$.

On applique alors le résultat suivant, comparant les deux laplaciens $\Delta'_{\mathcal{L}}$ et $\Delta_{\mathcal{L}}$.

Théorème 5.33 *On a $\Delta_{\mathcal{L}} = \Delta'_{\mathcal{L}} + 2\pi[L, \Lambda]$, où les opérateurs L et Λ sont les opérateurs de Lefschetz définis dans la section 5.5, qui sont des opérateurs d'ordre* 0 *agissant sur les formes, et donc aussi sur les formes à valeurs dans n'importe quel fibré vectoriel.*

Cette identité est obtenue en utilisant les identités kählériennes sur les formes et le fait que la courbure de la connexion ∇, c'est-à-dire l'opérateur d'ordre 0

$$\nabla \circ \nabla = \nabla' \circ \nabla'' + \nabla'' \circ \nabla',$$

est égale à $-2\iota\pi L$, ce qui est une conséquence du fait que la forme de Kähler choisie est la forme de Chern de la connexion.

La preuve se termine maintenant de la façon suivante : Supposons qu'on ait une forme harmonique α de type (p,q) à valeurs dans $\mathcal{L}$, avec $p + q > dim\, X$. Alors d'après le théorème 5.33, on a

$$\Delta'_{\mathcal{L}}\alpha = -2\pi[L, \Lambda]\alpha.$$

On applique maintenant le lemme suivant, dont la preuve est donnée plus loin :

Lemme 5.34 *On a la relation de commutation*

$$[L, \Lambda] = (k-n)Id \text{ sur} \mathcal{A}_X^k. \tag{32}$$

Comme α est une forme de degré $k = p+q$ à valeurs dans $\mathcal{L}$, on obtient donc

$$\Delta'_{\mathcal{L}}\alpha = 2\pi(n-k)\alpha.$$

On obtient maintenant

$$0 \le (\Delta'_{\mathcal{L}}\alpha, \alpha)_{L^2} = 2\pi(n-k)(\alpha, \alpha)_{L^2}.$$

Comme $n-k<0$, on conclut donc que $(\alpha,\alpha)_{L^2} \le 0$, et donc $\alpha = 0$. Ceci conclut la preuve du théorème d'annulation. ∎

Démonstration du lemme 5.34. Ceci est un lemme de géométrie hermitienne, car les opérateurs considérés sont d'ordre 0. On supposera donc que la métrique est la métrique plate standard. Rappelons que L est le produit extérieur par $\omega = \frac{\imath}{2}\sum_i dz_i \wedge d\overline{z}_i$. Soit A_i l'opérateur donné par le produit extérieur par $\frac{\imath}{2}dz_i \wedge d\overline{z}_i$. On a la formule facile

$$*^{-1}(d\overline{z}_i\wedge)* = (-1)^{k+1}2int(\frac{\partial}{\partial z_i}) \text{ sur } \mathcal{A}_X^k$$

et de même

$$*^{-1}(dz_i\wedge)* = (-1)^{k+1}2int(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_i}) \text{ sur } \mathcal{A}_X^k.$$

Donc

$$*^{-1}A_i* = -2\imath int(\frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i}).$$

Comme $L = \sum_i A_i$ et $\Lambda = \sum_i *^{-1}A_i *$, on a

$$[L, \Lambda] = \sum_{i,j}[A_i, *^{-1}A_j*].$$

Or d'après ce qui précède, A_i et $*^{-1}A_j*$ commutent pour $i \ne j$. Il vient donc

$$[L, \Lambda] = \sum_i [dz_i \wedge d\overline{z}_i, \, int(\frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i})].$$

Posons pour $M \subset \{1, \ldots, n\}$, $w_M = \wedge_{m\in M} dz_m \wedge d\overline{z}_m$. Toute forme ω de degré k peut s'écrire comme une combinaison linéaire des formes $\omega_{A,B,M} = dz_A \wedge d\overline{z}_B \wedge w_M$ où les sous-ensembles A, B et M de $\{1, \ldots, n\}$ sont disjoints, et $|A|+|B|+2|M| = k$. Si A, B et M sont fixés, soit $J = \{1, \ldots, n\} \setminus (A \cup B \cup M)$. Alors on a $dz_i \wedge d\overline{z}_i \wedge \omega_{A,B,M} = 0$ si $i \notin J$, et $int(\frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i})(\omega_{A,B,M}) = 0$ si $i \notin M$. De plus si $i \in M$ on a

$$(dz_i \wedge d\overline{z}_i) \circ int(\frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i})(\omega_{A,B,M}) = \omega_{A,B,M}.$$

Enfin si $i \in J$, on a

$$int(\frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i}) \circ (dz_i \wedge d\overline{z}_i)(\omega_{A,B,M}) = \omega_{A,B,M}.$$

On en conclut que

$$[L, \Lambda](\omega_{A,B,M}) = (|M| - |J|)\omega_{A,B,M}.$$

Or $|J| = n - |A| - |B| - |M|$ et donc $|M| - |J| = k - n$ et $[L, \Lambda](\omega_{A,B,M}) = (k-n)\omega_{A,B,M}$. L'égalité (32) est donc prouvée. ∎

6 Géométrie algébrique et géométrie complexe

6.1 Théorème de plongement de Kodaira

Le théorème de plongement de Kodaira caractérise les variétés complexes compactes admettant un plongement holomorphe dans un espace projectif $\mathbb{CP}^N$. Notons que si X admet un tel plongement j, le pull-back ω de la forme de Fubini-Study est une forme de Kähler sur X, dont la classe de cohomologie est une classe de cohomologie rationnelle : $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{Q}) \subset H^2(X, \mathbb{R})$. En effet cette classe est la classe de Chern $c_1(j^*\mathcal{O}(1))$ par le théorème 4.14. La réciproque due à Kodaira est la suivante :

Théorème 6.1 *Une variété compacte complexe X admet un plongement holomorphe dans un espace projectif complexe si et seulement si elle admet une métrique de Kähler dont la classe de cohomologie est rationnelle.*

Ce théorème se scinde en fait en deux énoncés, l'un étant une conséquence facile de la théorie de Hodge, l'autre étant une caractérisation métrique des fibrés en droites amples.

(Un fibré en droites holomorphes $\mathcal{L}$ (ou faisceau inversible de $\mathcal{O}_X$-modules) est dit *ample* si une puissance $\mathcal{L}^{\otimes k}$, $k > 0$ est *très ample*, c'est-à-dire que ses sections globales fournissent un plongement de X dans un espace projectif.)

Proposition 6.2 *Soit X une variété kählérienne compacte et soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites holomorphe sur X. Alors pour toute forme fermée α de type $(1,1)$ dont la classe $[\alpha]$ est égale à $c_1(\mathcal{L})$ dans $H^2(X, \mathbb{R})$, il existe une métrique h hermitienne sur $\mathcal{L}$ telle que la forme de Chern ω_h soit égale à α.*

Démonstration. Soit h_0 une métrique hermitienne, de forme de Chern ω_{h_0}. Par le théorème 4.14, $[\omega_{h_0}] = c_1(\mathcal{L}) = [\alpha] \in H^2(X, \mathbb{R})$. Donc $\alpha - \omega_{h_0}$ est exacte. Comme c'est une forme de type $(1,1)$ réelle, elle est égale par la proposition 5.29 (lemme $\partial\overline{\partial}$) à $\frac{1}{2\iota\pi}\partial\overline{\partial}\phi$, pour une fonction différentiable ϕ à valeurs réelles.

La métrique $h = e^{\phi}h_0$ satisfait alors

$$\omega_h = \omega_{h_0} + \frac{1}{2\iota\pi}\partial\overline{\partial}\phi = \alpha.$$

■

Soit X une variété complexe et ω une $(1,1)$-forme fermée réelle de classe de cohomologie rationnelle. Un multiple $N[\omega]$ provient alors d'une classe de cohomologie entière :

$$N[\omega] \in Im\,(H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathbb{R})).$$

Soit γ une classe entière telle que l'image de γ dans $H^2(X, \mathbb{R})$ soit égale à $N[\omega]$. La classe γ s'annule dans $H^2(X, \mathcal{O}_X)$. En effet la compatibilité des résolutions de de Rham de $\mathbb{C}$ et de Dolbeault de $\mathcal{O}_X$ montre que pour une classe de cohomologie de de Rham $[\omega] \in H^k(X, \mathbb{C})$ de degré k, représentée par une forme fermée ω, son image dans $H^k(X, \mathcal{O}_X)$ est représentée par la composante de type $(0,k)$ de ω qui est $\overline{\partial}$-fermée. Ici, comme $N\omega$ est de type $(1,1)$ sa composante de type $(0,2)$ est nulle.

La suite exacte exponentielle (13) montre alors que $N[\omega] = c_1(\mathcal{L})$ pour un fibré en droites holomorphe $\mathcal{L}$ sur X.

La proposition 6.2 montre alors qu'il existe une métrique hermitienne h sur $\mathcal{L}$ telle que $\omega_h = N\omega$.

Le théorème 6.1 est donc une conséquence du théorème suivant :

Théorème 6.3 *Soit X une variété complexe compacte, et $\mathcal{L}$ un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique h de forme de Chern ω_h strictement positive (c'est-à-dire une forme de Kähler). Alors $\mathcal{L}$ est ample sur X, c'est-à-dire que pour un entier $m > 0$, les sections holomorphes σ_i, $0 \leq i \leq K$ de $\mathcal{L}^{\otimes m}$ sur X fournissent un plongement*

$$\phi_{\mathcal{L}^{\otimes m}} : x \mapsto (\sigma_0(x), \ldots, \sigma_K(x))$$

de X dans $\mathbb{CP}^K$.

Ici, on rappelle que pour voir $x \mapsto (\sigma_0(x), \ldots, \sigma_K(x))$ comme une application holomorphe à valeurs dans l'espace projectif, on choisit localement une trivialisation holomorphe de $\mathcal{L}^{\otimes m}$, ce qui permet de voir localement les sections σ_i comme des fonctions holomorphes. Un changement de trivialisation multiplie ces fonctions par une même fonction inversible, donnant lieu à la même application à valeurs dans $\mathbb{CP}^K$.

Démonstration du théorème 6.3. On veut d'abord montrer que pour tout x dans X, il existe un entier $m_x > 0$ et une section σ de $\mathcal{L}^{\otimes m_x}$ telle que $\sigma(x) \neq 0$. Le même entier m_x est alors valable pour y dans un voisinage de x, et par compacité, on en déduit qu'on peut prendre le même m_x pour tout $x \in X$, de sorte qu'une puissance $\mathcal{L}^{\otimes m_0}$ est engendrée par ses sections. Dans un second temps, on montre par des arguments analogues qu'une puissance $\mathcal{L}^{\otimes m}$ fournit un plongement dans un espace projectif. On laissera de côté cette seconde étape.

Le fait qu'il existe $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m_x})$ telle que $\sigma(x) \neq 0$ se traduit par la surjectivité de la flèche de restriction

$$H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m_x}) \to H^0(x, \mathcal{L}^{\otimes m_x}_{|x}).$$

Introduisons l'éclaté $\widetilde{X}_x$ de X au point x. Il est obtenu de la façon suivante : on prend un ouvert U voisinage de x, dans lequel il existe des coordonnées holomorphes globales $z_1, \ldots, z_n$, $n = dim\, X$ centrées en x. Soit $\widetilde{U}_x \subset U \times \mathbb{CP}^{n-1}$ l'éclaté de U en x, défini par

$$\widetilde{U}_x = \{(y, Y) \in U \times \mathbb{CP}^{n-1},\ y = (y_1, \ldots, y_n),\ Y = (Y_1, \ldots, Y_n),$$

$$Y_i y_j = Y_j y_i,\ \forall i,\ j. \tag{33}$$

$\widetilde{U}_x$ est l'adhérence du graphe de l'application méromorphe $U \dashrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$, indéfinie en 0, donnée par la composée de $z \mapsto (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et de la projection naturelle $\mathbb{C}^n \to \mathbb{CP}^{n-1}$.

On vérifie que $\widetilde{U}_x$ est lisse, en utilisant les équations explicites ci-dessus. $\widetilde{U}_x$ se projette holomorphiquement sur U par la première projection qu'on note τ. τ est un isomorphisme au-dessus de $U \setminus \{x\}$, tandis que la fibre E au-dessus de x est une hypersurface complexe lisse isomorphe $\mathbb{CP}^{n-1}$. C'est le *diviseur exceptionnel*, dont le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_E$ est un faisceau inversible, qu'on note aussi $\mathcal{O}(-E)$.

L'éclaté $\widetilde{X}_x$ de X au point x est défini en recollant $\widetilde{U}_x$ et $X \setminus \{x\}$ suivant l'ouvert $\widetilde{U}_x \setminus E \cong U \setminus \{x\}$.

On note τ l'application naturelle de X_x dans X.

On a $\tau^* \mathcal{L}^{\otimes m_x} |\ E \cong \mathcal{O}_E$, et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m_x}) & \to & H^0(x, \mathcal{L}^{\otimes m_x}_{|x}) \\ \tau^* \downarrow & & \tau^* \downarrow \\ H^0(\widetilde{X}_x, \tau^* \mathcal{L}^{\otimes m_x}) & \to & H^0(E, \tau^* \mathcal{L}^{\otimes m_x}_{|E}) \end{array},$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes : celle de gauche par le théorème de Hartogs dans le cas où $n \geq 2$, qui dit qu'une section de $\mathcal{L}$ sur $X \setminus \{x\}$ s'étend sur x, l'autre à cause de la trivialité de $\tau^* \mathcal{L}^{\otimes m_x} |\ E$. (Noter que si $n = 1$, il n'y a pas besoin de pratiquer d'éclatement, on peut appliquer directement le théorème d'annulation de Kodaira.)

Il revient donc au même de montrer la surjectivité de la flèche de restriction

$$H^0(\widetilde{X}_x, \tau^* \mathcal{L}^{\otimes m_x}) \to H^0(E, \tau^* \mathcal{L}^{\otimes m_x}_{|E}).$$

Par la suite exacte

$$0 \to \tau^* \mathcal{L}^{\otimes m_x}(-E) \to \tau^* \mathcal{L}^{\otimes m_x} \to \tau^* \mathcal{L}^{\otimes m_x}_{|E} \to 0$$

et la suite exacte longue associée, il suffit de montrer que

$$H^1(\widetilde{X}_x, \tau^* \mathcal{L}^{\otimes m_x}(-E)) = 0$$

pour m_x suffisamment grand.

On veut appliquer le théorème d'annulation de Kodaira 5.31 à $\widetilde{X}_x$. Il faut pour cela montrer que pour m_x assez grand, le fibré en droites

$$\tau^* \mathcal{L}^{\otimes m_x}(-E) \otimes K^{-1}_{\widetilde{X}_x}$$

sur $\widetilde{X}_x$ est positif.

Remarquons d'abord que l'on a la formule suivante pour $K_{\widetilde{X}_x}$:

Lemme 6.4 *Le fibré canonique de $\widetilde{X}_x$ est donné par la formule :*

$$K_{\widetilde{X}_x} = \tau^* K_X((n-1)E).$$

Démonstration. Un calcul local utilisant les équations (33) montre aisément que le pull-back par τ d'une forme canonique non nulle en x, définie au voisinage de x, est une forme canonique sur $\widetilde{X}_x$ qui s'annule à l'ordre exactement $n-1$ le long de E. L'application de pull-back des formes holomorphes de degré maximal fournit donc un isomorphisme :

$$\tau^* : K_X \cong K_{\widetilde{X}_x} \otimes \mathcal{I}_E^{\otimes n-1} = K_{\widetilde{X}_x}(-(n-1)E)).$$

■

On est donc ramené à montrer que pour m_x assez grand, le fibré en droites

$$\tau^*(\mathcal{L}^{\otimes m_x} \otimes K_X^{-1})(-nE)$$

sur $\widetilde{X}_x$ est positif.

Prenons une métrique arbitraire h_K sur K_X de forme de Chern α. Soit h une métrique sur $\mathcal{L}$ de forme de Chern ω_h positive sur X. Alors la forme de Chern de la métrique $h^{\otimes m_0} \otimes h_K$ sur $\mathcal{L}^{\otimes m_x} \otimes K_X^{-1}$ est égale à $m_0\omega_h + \alpha$ qui par positivité de ω_h et compacité de X est positive pour m_0 assez grand.

Le pull-back $\tau^*(m_0\omega_h + \alpha)$ n'est que semi-positif : le long de E, cette forme s'annule sur l'espace tangent de E. Ceci est corrigé par le fait que $\mathcal{O}(-E)_{|E}$ est positif. En fait on a :

Lemme 6.5 *Le fibré inversible $\mathcal{O}(-E) = \mathcal{I}_E$ satisfait :*

$$E \cong \mathbb{CP}^{n-1},\ \mathcal{O}(-E)_{|E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1).$$

Démonstration. Pour voir concrètement le second isomorphisme, on note que le rang de τ le long de E est égal à 1, et que le noyau de la différentielle $\tau_* : T_{X_x} \to \tau^* T_X$ le long de E est égal à T_E. Donc τ_* le long de E se factorise en une inclusion de $N_{E/\widetilde{X}_x}$ dans $\tau^* T_{X,x}$. Le fibré normal N_{E/X_x} est isomorphe à $\mathcal{O}(E)_{|E}$ (cf section 7) et cette inclusion fournit les isomorphismes

$$\mathcal{O}(E)_{|E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1),\ \mathbb{P}^{n-1} \cong \mathbb{P}(T_{X,x}),$$

où l'on voit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$ comme le sous-fibré tautologique de rang 1 du fibré trivial sur $\mathbb{P}^{n-1}$. ■

Remarque 6.6 L'isomorphisme $\mathcal{O}(-E)_{|E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$ peut aussi se voir en rappelant que $\mathcal{O}(-E) = \mathcal{I}_E$, et en examinant les équations naturelles définissant $E \subset \widetilde{U}_x$.

Il résulte de la positivité de $\mathcal{O}(-E)_{|E}$ (voir l'exemple 4.18) qu'il existe une métrique à forme de Chern positive sur $\mathcal{O}(-E)_{|E}$. La métrique s'étend en une métrique h_E sur $\mathcal{O}(-E)$, fournissant aussi h_E^n sur $\mathcal{O}(-nE)$. La forme de Chern ω_{h_E} de h_E a la propriété que sa restriction à E est positive. Un argument simple de géométrie hermitienne ponctuelle combiné avec la compacité de E montre alors que $\tau^*(m_0\omega_h + \alpha) + n\omega_{h_E}$ est positive sur $\widetilde{X}_x$ pour m_0 assez grand.

■

Remarque 6.7 Notons que lorsqu'on sait que $\mathcal{L}^{\otimes m_0}$ est engendré par ses sections, le morphisme $\phi_{\mathcal{L}^{\otimes m_0}}$ de X dans $\mathbb{CP}^{K_0}$ fourni par les sections globales de $\mathcal{L}^{\otimes m_0}$ est nécessairement fini. En effet, supposons qu'il existe une fibre de dimension positive Z. Soit Z_0 une composante irréductible de Z de dimension $l > 0$. On sait que $\mathcal{L}_{|Z_0}^{\otimes m_0}$ est trivial vu qu'on a la formule

$$\mathcal{L}^{\otimes m_0} = \phi^*_{\mathcal{L}^{\otimes m_0}} \mathcal{O}(1),$$

et que $\phi(Z_0)$ est un point. Il en résulte que la classe $[\omega]$ s'annule sur Z_0 de sorte que $\int_{Z_0} [\omega]^l = 0$. (On admet ici le fait que Z_0 admet une classe fondamentale de degré $2l$.) Or le nombre $\int_{Z_0} [\omega]^l$ est calculé d'après les résultats de Lelong par l'intégrale convergente $\int_{Z_{0,reg}} \omega^l$, où $Z_{0,reg} \subset Z_0$ est l'ouvert dense de lissité de Z_0. On a donc $\int_{Z_{0,reg}} \omega^l = 0$, ce qui contredit le fait que ω est une forme de Kähler, et donc que $\omega^l_{|Z_{0,reg}}$ est une forme volume.

6.2 Le principe GAGA

6.2.1 Le foncteur algébrique vers analytique

Géométrie analytique. On considère la variété complexe compacte $\mathbb{CP}^n$. Elle est munie de sa topologie usuelle et de son faisceau $\mathcal{O}$ de fonctions holomorphes.

Définition 6.8 *Un sous-ensemble analytique fermé de $\mathbb{CP}^n$ est un sous-ensemble fermé Z localement défini par des équations holomorphes.*

La définition est ici ensembliste. Il est plus utile de parler de sous-schéma analytique : un tel sous-schéma est défini par un sous-faisceau $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-modules. Le faisceau d'idéaux d'un sous-ensemble analytique est cohérent par le théorème d'Oka, c'est-à-dire admet localement une présentation

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^r \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^s,$$

où la flèche est nécessairement donnée par une matrice de fonctions holomorphes. Inversement, étant donné un tel faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$, on a le sous-ensemble analytique défini par $\mathcal{I}$:

$$Z : \{z \in \mathbb{P}^n, \text{l'application composee}$$
$$\mathcal{I} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathbb{C}_z \text{ est nulle}\}.$$

Ici la dernière flèche est la flèche d'évaluation des fonctions au point z. Comme $\mathcal{I}$ est localement engendré par un nombre fini de fonctions, Z est bien un ensemble analytique. Z est aussi muni du faisceau de fonctions

$$\mathcal{O}_Z := i^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}/\mathcal{I}$$

qui fait de Z un espace localement annelé.

Un faisceau cohérent sur un tel espace analytique est un faisceau de $\mathcal{O}_Z$-modules qui admet localement une présentation finie

$$\mathcal{O}_Z^r \to \mathcal{O}_Z^s \to \mathcal{F} \to 0.$$

On peut également voir $\mathbb{CP}^n$ comme une variété algébrique. Plus précisément, rappelons que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, l'ensemble des points fermés de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, est l'union de $n+1$ espaces affines $U_i \cong \mathbb{C}^n$. Chaque $\mathbb{C}^n$ est aussi le spectre maximal de l'algèbre $k[X_1, \ldots, X_n]$ qu'on peut munir de la topologie de Zariski (restreinte au spectre maximal). Ainsi *l'ensemble* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{CP}^n$ a deux topologies : la topologie usuelle (indice "us") et la topologie de Zariski (indice "Zar"). De plus il a de façon correspondante deux faisceaux structurels : le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an}$ des fonctions holomorphes pour la topologie usuelle et le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{alg}$ des fonctions algébriques dans la topologie de Zariski (cf section 1). On utilise les notations $\mathbb{CP}^n$ pour la variété complexe et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ pour la variété algébrique, considérées comme des espaces annelés.

Lemme 6.9 *L'identité*

$$I : \mathbb{P}^n(\mathbb{C})_{us} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})_{Zar}$$

est continue. De plus c'est naturellement un morphisme d'espaces annelés

$$\mathbb{CP}^n = (\mathbb{P}^n(\mathbb{C})_{us}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an}) \to (\mathbb{P}^n(\mathbb{C})_{Zar}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{alg}).$$

Démonstration. Le premier énoncé dit que si U est un ouvert pour la topologie de Zariski, c'est aussi un ouvert pour la topologie usuelle, ce qui est clair vu que le complémentaire, étant défini dans les ouverts d'un recouvrement par des ouverts affines standard par des fonctions polynomiales, et donc en particulier continues, est fermé. (Il faut noter ici que les ouverts affines standard sont ouverts pour la topologie usuelle de $\mathbb{CP}^n$.)

Pour le second point, on note que $I^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{alg}$ est le faisceau qui à un ouvert U de $\mathbb{CP}^n$ associe les fonctions rationnelles sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ partout définies sur U. Clairement une fonction rationnelle est holomorphe là où elle est définie, ce qui fournit l'inclusion naturelle $I^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{alg} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an}$. ∎

Soit $\mathcal{F}^{alg}$ un faisceau cohérent algébrique sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})_{Zar}$, c'est-à-dire un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{alg}$-modules qui est localement de présentation finie (c'est une définition équivalente à celle donnée dans la section 1). On peut lui associer le faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}^{an}$ sur $\mathbb{CP}^n$ défini par

$$\mathcal{F}^{an} := I^{-1}\mathcal{F}^{alg} \otimes_{I^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{alg}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an}.$$

$\mathcal{F}^{an}$ est localement de présentation finie sur $\mathbb{CP}^n$ et donc cohérent.

En particulier, si $\mathcal{I}$ est un faisceau d'idéaux algébrique définissant un sous-schéma projectif $X_{Zar} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (ici on ne considère comme plus haut que la partie correspondant aux spectres maximaux, c'est-à-dire aux points fermés), on a un sous-faisceau correspondant

$$\mathcal{I}^{an} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an}$$

qui étant localement de présentation finie définit un sous-espace analytique

$$X^{an} = I^{-1}X_{Zar},\ \mathcal{O}_{X^{an}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an}/\mathcal{I}^{an}$$

de $\mathbb{CP}^n$.

De plus si $\mathcal{F}$ est un faisceau algébrique cohérent sur X_{Zar}, qu'on peut voir comme un faisceau algébrique cohérent sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})_{Zar}$, $\mathcal{F}^{an}$ est un faisceau analytique cohérent sur X^{an}.

Un résultat important qu'on ne montrera pas ici est le suivant :

Théorème 6.10 *L'inclusion naturelle $I^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{alg} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an}$ est plate, c'est-à-dire que les anneaux locaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,x}^{an}$ sont plats sur les anneaux locaux correspondants $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,x}^{alg}$. Le résultat reste vrai si $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est remplacé par n'importe quel sous-schéma algébrique fermé $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.*

Corollaire 6.11 *Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{an}$ de la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})_{Zar}$ dans celle des faisceaux analytiques cohérents sur $\mathbb{CP}^n$ est exact. Le même résultat est vrai si $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})_{Zar}$ est remplacé par n'importe quel sous-schéma projectif $X_{Zar} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})_{Zar}$.*

6.2.2 Variétés de Chow

On se propose de montrer ici de montrer un cas particulier du théorème de Serre :

Théorème 6.12 *(Chow) Soit $X \subset \mathbb{CP}^n$ une sous-variété complexe fermée. Alors X peut être définie ensemblistement par des équations algébriques.*

L'intérêt de cet énoncé réside surtout dans la preuve, qui associe à une sous-variété de l'espace projectif une hypersurface d'une grassmannienne adéquate. C'est une manière de paramétrer les sous-variétés de l'espace projectif par leurs "formes de Chow".

Remarque 6.13 Ici on ne prend pas en compte les structures schématiques, ce qui est le gros défaut des variétés de Chow par opposition aux schémas de Hilbert qu'on verra plus loin. Les formes de Chow qu'on va introduire ne paramètrent au mieux que des "cycles effectifs", c'est-à-dire des schémas réduits de dimension pure donnée, avec des multiplicités entières positives affectées aux composantes irréductibles (cf définition 3.4).

Groupe de Picard et diviseurs des Grassmanniennes. On va commencer par étudier le groupe de Picard holomorphe et les hypersurfaces complexes des grassmanniennes. On a tout d'abord :

Lemme 6.14 *Soit $G = G(r,n)(\mathbb{C})$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels complexes de $\mathbb{C}^n$ de rang r. Alors on a $Pic^{an}(G) = \mathbb{Z}\mathcal{L}^{an}$, où $\mathcal{L}$ est le fibré en droites de Plücker, et toute hypersurface complexe $Z \subset G$ est algébrique : ceci équivaut à dire que*

$$H^0(G_{us}, (\mathcal{L}^{an})^{\otimes k}) = H^0(G_{Zar}, \mathcal{L}^{\otimes k}),\ \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Démonstration. Le second énoncé est un cas particulier du théorème de Serre qu'on montrera plus loin. On peut aussi le montrer en utilisant les théorèmes d'annulation analytique et algébrique et l'égalité facile des sections holomorphes et algébriques des fibrés en droites dans le cas des courbes, ce qui permet de montrer l'égalité d'abord pour k assez grand, puis pour tout k.

Pour le premier énoncé, on choisit deux sous-espaces vectoriels complexes $W \subset \mathbb{C}^n$, $V_0 \subset \mathbb{C}^n$, de dimensions respectives $n-r$ et r, et tels que

$$W \oplus V_0 = \mathbb{C}^n.$$

W définit une hypersurface $H_W \subset G(r,n)$ constituée des sous-espaces $V \subset \mathbb{C}^n$ rencontrant non trivialement W. Un moment de réflexion montre que H_W est une hypersurface de Plücker, c'est-à-dire est l'intersection d'un hyperplan avec la grassmannienne dans son plongement de Plücker, qui est donné par les sections algébriques de $\mathcal{L}$ (cf section 2.3.2).

Le complémentaire de H_W est isomorphe à $Hom_{\mathbb{C}}(V_0, W)$. En effet, tout sous-espace V de rang r qui ne rencontre pas W se projette isomorphiquement sur V_0 depuis V et donc est le graphe (dans $V_0 \oplus W$) d'une application linéaire de V_0 dans W.

Comme H_W est une hypersurface irréductible (en ôtant de H_W un sous-espace analytique fermé de dimension plus petite, on obtient quelque chose de connexe, à montrer en exercice...), on en déduit immédiatement les résultats topologiques suivants :

On a $H^1(G,\mathbb{Z}) = 0$ et $H^2(G,\mathbb{Z})$ est engendré par la classe de cohomologie de l'hypersurface H_W, qui est égale à la classe de Chern de $\mathcal{L}^{an}$ (cf section 4.1.5).

La théorie de Hodge montre alors que $H^1(G, \mathcal{O}_G) = 0$ (un fait qu'on peut aussi déduire du théorème d'annulation de Kodaira et du fait que le fibré canonique de G est négatif). La suite exponentielle (13) montre alors que $Pic^{an}(G)$ est engendré par $\mathcal{L}^{an}$. ■

Forme de Chow. Soit $X \subset \mathbb{CP}^n$ un sous-espace analytique fermé réduit et irréductible de dimension r. Cela signifie qu'il existe un sous-espace analytique fermé $Z \subset X$ d'intérieur vide dans X tel que $X \setminus Z$ est une sous-variété complexe de dimension r de $\mathbb{CP}^n$.

Soit $G = G(n-r, n+1)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels complexes de dimension $n-r$ de $\mathbb{C}^{n+1}$. On va s'intéresser à l'ensemble suivant :

$$W := \{V \in G,\, \overline{V} \cap X \neq \emptyset\},$$

où $\overline{V}$ est l'espace projectif $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{CP}^n$. On se propose de montrer :

Théorème 6.15 *W a naturellement la structure d'une hypersurface analytique de G. De plus W détermine X.*

La preuve montrera explicitement comment W détermine X, de sorte que l'algébricité de W résultant du lemme 6.14 entraînera celle de X, c'est-à-dire le théorème 6.12.

Sur G, on dispose du sous-fibré projectif universel $P \subset G \times \mathbb{P}^n$ et du diagramme d'incidence :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}^n \\ p\downarrow & & \\ G & & \end{array}.$$

Ici P est défini comme $Proj\, Sym^{\cdot}\mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ est le fibré dual du sous-fibré tautologique $\mathcal{S}$ sur la grassmannienne (cf section 2.3.3). La fibre de p en un point $V \in G$ s'identifie via q au sous-espace $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}^n$.

Il en résulte que Z s'identifie ensemblistement à $p(q^{-1}(X))$. Comme q est holomorphe, $q^{-1}(X)$ est un sous-ensemble analytique fermé de P.

Théorème 6.16 *Si $\Gamma \subset P$ est un sous-ensemble analytique fermé, $p(\Gamma) \subset G$ est un sous-ensemble analytique fermé.*

C'est un théorème difficile de géométrie analytique valable plus généralement pour les applications holomorphes propres. Notons cependant que si X est lisse $q^{-1}(X)$ est lisse, et là où p est de rang localement constant, l'énoncé résulte du théorème du rang constant en géométrie complexe.

Montrons maintenant :

Lemme 6.17 *Z est une hypersurface analytique de la grassmannienne.*

Démonstration. On connaît la dimension de la grassmannienne G, puisqu'on a des ouverts isomorphes à $Hom\,(V, W)$ avec $rang\, V = n - r$, $V \oplus W \cong \mathbb{C}^{n+1}$. Cela donne $dim\, G = rang\, Hom\,(V, W) = (n-r)(r+1)$.

Pour la même raison on connaît la dimension de $q^{-1}(X)$, qui est irréductible. En effet, l'application q est une fibration en grassmanniennes $G(n-r-1, n)$ puisque l'ensemble des sous-espaces vectoriels de rang $n-r$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ contenant une droite donnée $< x >$ s'identifie par la flèche $V \mapsto V/ < x >$ à l'ensemble des sous-espaces vectoriels de rang $n-r-1$ de $\mathbb{C}^{n+1}/ < x >$. Il en résulte par l'additivité des dimensions que

$$dim\, q^{-1}(X) = dim\, X + (n-r-1)(r+1) = r + (n-r-1)(r+1) = dim\, G - 1.$$

Pour conclure que $dim\, Z = dim\, q^{-1}(X) = dim\, G - 1$, il reste à montrer le résultat suivant :

Lemme 6.18 *Il existe un ouvert dense lisse U de $q^{-1}(X)$ sur lequel p est un plongement : $p_{|U\subset q^{-1}(X)}$ est un isomorphisme sur son image.*

Démonstration. Il existe un ouvert dense X^0 de X le long duquel X est une sous-variété complexe de $\mathbb{P}^n$. Alors $q^{-1}(X^0) \subset q^{-1}(X)$ est dense dans $q^{-1}(X)$ et est une sous-variété complexe de P, du fait que q est une fibration.

Soit $(V, x) \in q^{-1}(X)$, $x \in V$. Alors la fibre de p restreinte à $q^{-1}(X)$ au-dessus de $V \in G$ s'identifie schématiquement à l'intersection $\mathbb{P}(V) \cap X$. On doit donc montrer que l'ensemble des $(V, x) \in G$ tels que $\mathbb{P}(V) \cap X$ ne consiste pas en le seul point lisse x de X où l'intersection est transverse, est un sous-ensemble analytique de $q^{-1}(X)$ de dimension $< dim\, G - 1 = dim\, Z$.

Si $\mathbb{P}(V)$ rencontre X en un point singulier $x \in X_{sing}$, alors $V \in p(q^{-1}(X_{sing})$ qui est de dimension $< dim\, G - 1$ car $dim\, X_{sing} < dim\, X$.

Si $\mathbb{P}(V)$ rencontre X en un point lisse x mais non transversalement, alors V contient la droite $< x >$ mais son intersection avec l'espace tangent du cône sur X dans $\mathbb{C}^{n+1}$ le long d'un point de la droite x n'est pas réduite à $< x >$. x étant fixé, l'ensemble des V contenant $< x >$ et satisfaisant cette condition relativement à l'espace tangent du cône est une sous-variété propre de la grassmannienne $G(n-r-1, r+1)$. Il en résulte que l'ensemble des (V, x) satisfaisant ces conditions est un sous-ensemble analytique propre de $q^{-1}(X^0)$ et donc est de dimension $< dim\, q^{-1}(X) = dim\, G - 1$.

Enfin un compte semblable de dimensions montre que l'ensemble des $\mathbb{P}(V)$ qui rencontrent X en au moins deux points est de dimension $< dim\, G - 1$. Ceci conclut la preuve du lemme 6.18 et donc aussi du lemme 6.17. ∎

L'hypersurface Z de G associée à X est donnée par une section de $\mathcal{L}^{\otimes k}$ sur G, où l'entier k ne dépend que du degré de X (cf section 3.6). Cette section est appelée la *forme de Chow* de X. Par le théorème 34, Z est une hypersurface algébrique de la Grassmannienne G.

Pour conclure la preuve des théorèmes 6.15 et 6.12, montrons la chose suivante : Considérons $Z \subset G$ et $P_Z := p^{-1}(Z) \subset P$. Comme Z est algébrique, ainsi que p, $q_Z : P_Z \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est algébrique.

Lemme 6.19 *X s'identifie à l'ensemble des points x de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ tels que $q_Z^{-1}(x) = P_Z \cap q^{-1}(x)$ est égal à $q^{-1}(x)$.*

Démonstration. On veut montrer que si $y \notin X$, il existe un espace vectoriel $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$ de rang $n - r$ contenant la droite $< y >$ mais tel que $\mathbb{P}(V)$ ne rencontre pas X. Comme $y \notin X$, la projection π_y depuis y sur $\mathbb{P}^{n-1}$

$$(X_0, \ldots, X_n) \mapsto (X_1, \ldots, X_n),$$

où les coordonnées homogènes sont choisies de façon que y est défini par les équations $X_i = 0$, $i > 0$, est bien définie sur X, et en fait finie (à cause de l'argument donné dans la remarque 6.7). L'image $\pi_y(X)$ est donc un sous-ensemble analytique fermé de $\mathbb{CP}^{n-1}$, de dimension r. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{n+1}$ de rang $n-r$ s'identifient via π_y^{-1} aux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{n+1}/ < y >$ de rang $n-r-1$, et si V contient y, $\mathbb{P}(V)$ rencontre X si et seulement si $\mathbb{P}(V/ < y >)$ rencontre $\pi_y(X)$. On peut donc appliquer le lemme 6.17 à $\pi_y(X)$ ce qui permet de conclure que les V contenant $< y >$ et rencontrant Z forment une hypersurface dans la Grassmannienne des V contenant $< y >$. ∎

Il est facile de voir, puisqu'on sait que P_Z est algébrique, que l'ensemble défini par la condition du lemme 6.19 est défini par des équations algébriques. En effet, $Z \subset P$ est défini par des équations globales (sections du faisceau d'idéaux de Z tordu par un fibré inversible suffisamment ample), dont les restrictions aux fibres de q sont des fonctions algébriques de $x \in \mathbb{P}^n$. On doit écrire que ces restrictions s'annulent, ce qui fournit les équations algébriques cherchées pour X. Les théorèmes 6.12 et 6.15 sont donc démontrés. ∎

6.2.3 Le théorème de comparaison de Serre

On a construit précédemment un foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{an}$ qui va de la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ dans la catégorie des faisceaux analytiques cohérents sur $\mathbb{CP}^n$, et plus généralement, pour tout schéma projectif $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, on a le foncteur similaire $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{an}$ qui va de la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur X dans la catégorie des faisceaux analytiques cohérents sur l'espace analytique X^{an}.

Théorème 6.20 *(Serre) Pour tout X, le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{an}$ est une équivalence de catégories.*

On a déjà vu que ce foncteur est exact. De plus, par platitude, pour $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ cohérents sur X, on a

$$\mathcal{H}om\,(\mathcal{F},\mathcal{G})^{an} = \mathcal{H}om\,(\mathcal{F}^{an},\mathcal{G}^{an})$$

par le théorème de platitude 6.10.

Pour montrer que c'est une équivalence de catégories, comme on a dans les catégories de faisceaux analytiques cohérents ou algébriques

$$Hom\,(\mathcal{F},\mathcal{G}) = H^0(X,\mathcal{H}om\,(\mathcal{F},\mathcal{G})), \tag{35}$$
$$Hom\,(\mathcal{F}^{an},\mathcal{G}^{an}) = H^0(X^{an},\mathcal{H}om\,(\mathcal{F}^{an},\mathcal{G}^{an})) = H^0(X^{an},\mathcal{H}om\,(\mathcal{F},\mathcal{G})^{an}),$$

on doit montrer les deux propositions suivantes :

Proposition 6.21 *Tout faisceau analytique cohérent sur X^{an} est isomorphe à un $\mathcal{F}^{an}$, pour un faisceau algébrique cohérent $\mathcal{F}$ sur X.*

Proposition 6.22 *Pour tout faisceau algébrique cohérent $\mathcal{F}$ sur X, notant $I : X^{an} \to X$ le morphisme naturel d'espaces annelés,*

$$I^* : I^{-1}\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{an}$$

fournit un isomorphisme

$$I^* : H^i(X,\mathcal{F}) \cong H^i(X^{an},\mathcal{F}^{an}).$$

Ceci est en effet suffisant puisqu'on a alors d'après (35)

$$Hom\,(\mathcal{F},\mathcal{G}) = Hom\,(\mathcal{F}^{an},\mathcal{G}^{an}),$$

garantissant l'équivalence de catégories.

La stratégie est la suivante : on montre d'abord les propositions 6.21 et 6.22 pour $X = \mathbb{P}^n$. On montre ensuite que si $\mathcal{F}_0$ est un faisceau analytique cohérent sur X^{an}

et donc, en tant que faisceau analytique cohérent sur $\mathbb{P}^n$, de la forme $\mathcal{F}^{an}$ pour un faisceau algébrique cohérent $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}^n$ uniquement déterminé d'après la proposition 6.22 pour $\mathbb{P}^n$, $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules et donc en fait un faisceau cohérent sur X. Cela résulte du calcul suivant :

$$Hom\,(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}(l)) = Hom\,(\mathcal{O}_{X^{an}}, \mathcal{F}^{an}(l))$$

$$= H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}^{an}(l)) = H^0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{F}(l))$$

pour tout l, où la seconde égalité vient du fait que $\mathcal{F}^{an}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{X^{an}}$-modules.

Les propositions 6.21 et 6.22 pour $\mathbb{P}^n$ seront obtenues comme des conséquences des énoncés suivants (proposition 6.23 et proposition 6.24 :

Proposition 6.23 *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $\mathbb{CP}^n$. Alors pour l suffisamment grand, $\mathcal{F}(l)$ est engendré par ses sections globales, et de plus*

$$H^i(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}(l)) = 0, \, \forall i > 0.$$

Démonstration. Par récurrence sur n. Soit $x \in \mathbb{CP}^n$ et soit $\sigma \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ une section définissant un hyperplan $H \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ passant par x. La multiplication par σ induit un morphisme

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}(1)$$

dont le quotient est isomorphe à $\mathcal{F}(1)_{|\mathbb{CP}^{n-1}}$. Le noyau $\mathcal{G}$ de cette flèche est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_H^{an}$-modules, et donc on peut lui appliquer les hypothèses de récurrence, ainsi qu'à $\mathcal{F}(1)_{|\mathbb{CP}^{n-1}}$. Notons d'autre part que si pour un certain l, $\mathcal{F}(l)_{|\mathbb{CP}^{n-1}}$ est engendré par ses sections, et l'application de restriction

$$H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}(l)) \to H^0(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathcal{F}(l))_{|\mathbb{P}^{n-1}}$$

est surjective, alors $\mathcal{F}(l)$ est engendré par ses sections en x, donc au voisinage de x, et par compacité, pour un l assez grand indépendant de x, $\mathcal{F}(l)$ est engendré par ses sections.

Soit $\mathcal{H} := Im\,\sigma$. Considérons les deux suites exactes :

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{H} \to \mathcal{F}(1) \to \mathcal{F}(1)_{|\mathbb{CP}^{n-1}} \to 0.$$

Elles induisent après tensorisation par $\mathcal{O}(l)$ des suites exactes longues de cohomologie. Comme $\mathcal{G}(l)$ et $\mathcal{F}(l+1)_{|\mathbb{CP}^{n-1}}$ n'ont pas de cohomologie en degré > 0 pour l assez grand, ces suites exactes longues se réduisent à

$$H^i(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}(l)) \cong H^i(\mathbb{CP}^n, \mathcal{H}(l)), \, \forall i > 0,$$

$$H^i(\mathbb{CP}^n, \mathcal{H}(l)) \cong H^i(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}(l+1)), \, \forall i > 1,$$

et de plus l'application

$$H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{H}(l)) \to H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}(l+1))$$

est surjective pour $l >> 0$. Il résulte de ces faits que l'application

$$\sigma : H^i(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}(l)) \to H^i(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}(l+1))$$

est surjective pour tout $i > 0$, est un isomorphisme pour tout $i \geq 2$, et de plus est un isomorphisme pour $i = 1$ si et seulement si l'application de restriction

$$H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}(l)) \to H^0(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathcal{F}(l)_{|\mathbb{CP}^{n-1}}) \tag{36}$$

est surjective.

Soit l_0 assez grand pour que ces conclusions soient satisfaites pour $l \geq l_0$. On utilisera le fait que les groupes de cohomologie des faisceaux analytiques cohérents sur $\mathbb{CP}^n$ (et en fait sur toute variété complexe compacte) sont des espaces vectoriels de dimension finie. Alors les dimensions de $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}(l))$ sont décroissantes avec $l \geq l_0$ et donc stationnaires à partir d'un certain $l \geq l_1$. Alors comme

$$\sigma : H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}(l)) \to H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}(l+1))$$

est surjective pour $l \geq l_1$ elle doit aussi être un isomorphisme, et on conclut que la flêche(36) est surjective pour $l \geq l_1$.

Appliquant l'hypothèse de récurrence à $\mathcal{F}_{|\mathbb{CP}^{n-1}}$, on a donc montré que $\mathcal{F}(l)$ est engendré par ses sections pour l assez grand, et pour montrer que $H^i(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}(l)) = 0$, $i > 0$ pour l suffisamment grand, on raisonne par récurrence décroissante sur i.

Du fait que $\mathcal{F}(l_0)$ est engendré par ses sections, on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{G} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an}(-l_0)) \to \mathcal{F} \to 0 \tag{37}$$

où $W = H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}(l_0)$. On sait que le résultat est vrai pour les fibrés en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an}(k)$, par le théorème d'annulation de Kodaira. Donc on a pour $l >> 0$, en tensorisant (37) par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an}(l)$ et en prenant la suite exacte longue de cohomologie,

$$H^i(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}(l)) \cong H^{i+1}(\mathbb{CP}^n, \mathcal{G}(l)).$$

Pour conclure la récurrence descendante, il suffit de prouver que pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{CP}^n$, on a

$$H^i(\mathbb{CP}^n, \mathcal{G}) = 0,\ i > n.$$

Ce fait résulte de l'existence (prouvée ci-dessus) d'une résolution à gauche de $\mathcal{G}$ finie par des faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an}$-modules libres. Or pour ces derniers, on sait calculer la cohomologie par la résolution de Dolbeault, et donc on sait qu'elle s'annule en degré $> n$.

∎

Proposition 6.24 *Pour tous entiers l et i, I^* fournit un isomorphisme*

$$H^i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(l)) \cong H^i(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}(l)^{an}).$$

Démonstration. Par récurrence sur n et l. On sait donc par l'hypothèse de récurrence sur n que

$$H^i(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(l)^{an}) = 0,\ \forall 0 < i < n-1. \tag{38}$$

De plus, on montre par les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 2.19 que pour tous n, $l \geq 0$

$$H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)^{an}) = H^0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) = Sym^l V,\, V = H^0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)).$$

Il résulte de la seconde égalité que la flèche de restriction

$$H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)^{an}) \to H^0(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(l)^{an})$$

est surjective. Ici $\mathbb{CP}^{n-1}$ est l'hyperplan défini par une équation homogène $\sigma = 0$.

Du fait de cette surjectivité, et de (38), la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)^{an} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l+1)^{an} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(l)^{an} \to 0 \tag{39}$$

se résume à des suites exactes courtes

$$0 \to H^0(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)^{an}) \to H^0(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l+1)^{an}) \to H^0(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(l)^{an}) \to 0, \tag{40}$$

$$H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)^{an}) \cong H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l+1)^{an}),\, i < n-1, \tag{41}$$

et de plus la flèche de multiplication par σ

$$H^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)^{an})) \to H^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l+1)^{an})$$

est injective pour tout l. Or on sait par le théorème d'annulation de Kodaira que $H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)^{an})$ est nul pour $i > 0$ et l assez grand. Il en résulte que

$$H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)^{an}) = 0,\, \forall 0 < i < n.$$

Il résulte aussi de (40) et d'un argument de récurrence sur l et n que la flèche

$$I^* : H^0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) \to H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)^{an})$$

est un isomorphisme pour tous n et l. (Pour $l = 0$ on utilise le fait que les fonctions holomorphes sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ sont constantes.)

Il reste à voir ce qui se passe pour $i = n$. On a d'après ce qui précède des suites exactes de cohomologie analytique et algébrique associées à la suite exacte (39) et à son analogue algébrique :

$$0 \to H^{n-1}(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(l)^{an}) \to H^n(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l-1)^{an}) \to H^n(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)^{an}) \to 0,$$

$$0 \to H^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(l)) \to H^n(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l-1)) \to H^n(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) \to 0.$$

Ces suites exactes sont compatibles avec I^*. Par récurrence sur n on peut supposer que I^* est un isomorphisme sur les termes de gauche. Par récurrence descendante sur l, on peut supposer que I^* est un isomorphisme sur les termes de droite, et alors c'est un isomorphisme sur les termes du milieu. Pour conclure il suffit de savoir que I^* est un isomorphisme $H^n(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l))$ sur $H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)^{an})$ pour l assez grand. Dans le cas analytique, c'est vrai par le théorème d'annulation de Kodaira, et dans le cas algébrique c'est vrai par le théorème 2.36. ■

Preuve de la proposition 6.21 pour $\mathbb{P}^n$. D'après la proposition 6.23, tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}_0$ sur $\mathbb{P}^n$ admet une présentation

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an})^r(-n_1) \xrightarrow{\Phi} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an})^s(-n_0) \to \mathcal{F}_0 \to 0.$$

La flèche Φ est donnée par une matrice de taille (s, r) dont les coefficients sont des sections holomorphes de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an}(-n_0 + n_1)$. On a déjà noté que ces sections sont algébriques, et on a donc un faisceau algébrique cohérent défini par la suite exacte :

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})^r(-n_1) \xrightarrow{\Phi} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})^s(-n_0) \to \mathcal{F} \to 0.$$

Il est clair que $\mathcal{F}^{an} = \mathcal{F}_0$. ∎

Preuve de la proposition 6.22 pour $\mathbb{P}^n$. Tout faisceau algébrique cohérent $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}^n$ admet une résolution à gauche

$$\ldots \to (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})^{r_k}(-l_k) \xrightarrow{\Phi_k} \ldots \xrightarrow{\Phi_0} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})^{r_0}(-l_0) \to \mathcal{F} \to 0,$$

pour un k arbitrairement grand. Le faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}^{an}$ admet alors la résolution à gauche

$$\ldots \to (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an})^{r_k}(-l_k) \xrightarrow{\Phi_k} \ldots \xrightarrow{\Phi_0} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an})^{r_0}(-l_0) \to \mathcal{F}^{an} \to 0.$$

Pour $k = n$, le noyau $\mathcal{K}$ de Φ_k est un faisceau algébrique cohérent localement libre, et il résulte de la théorie de Dolbeault que $H^l(\mathbb{CP}^n, \mathcal{K}^{an}) = 0$, $\forall l > n$. Le complexe $\mathcal{K}^{\cdot}$ (où $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})^{r_0}(-l_0)$ est mis en degré 0)

$$0 \to \mathcal{K} \to (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})^{r_n}(-l_n) \xrightarrow{\Phi_n} \ldots \xrightarrow{\Phi_0} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})^{r_0}(-l_0) \to 0$$

est quasi-isomorphe à $\mathcal{F}$ (mis en degré 0), et l'on a donc

$$H^i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{F}) = \mathbb{H}^i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{K}^{\cdot}). \tag{42}$$

De même le complexe $\mathcal{K}^{\cdot}_{an}$ (où $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an})^{r_0}(-l_0)$ est mis en degré 0)

$$0 \to \mathcal{K}^{an} \to (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an})^{r_n}(-l_n) \xrightarrow{\Phi_n} \ldots \xrightarrow{\Phi_0} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{an})^{r_0}(-l_0) \to 0$$

est quasi-isomorphe à $\mathcal{F}^{an}$. On a donc

$$H^i(\mathbb{CP}^n, \mathcal{F}^{an}) = \mathbb{H}^i(\mathbb{CP}^n, \mathcal{K}^{\cdot}_{an}). \tag{43}$$

Le terme de droite dans (42) se calcule comme l'aboutissement d'une suite spectrale

$$E_1^{p,q,alg} = H^q(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{K}^p),\ p + q = i.$$

De même, le terme de droite dans (43) se calcule comme l'aboutissement d'une suite spectrale

$$E_1^{p,q,an} = H^q(\mathbb{CP}^n, \mathcal{K}^p_{an}),\ p + q = i.$$

Il y a un morphisme naturel de la première suite spectrale vers la seconde, induit par le morphisme I^*. Il suffit donc de montrer que I^* induit un isomorphisme sur les termes E_1. Considérons les termes $E_1^{p,q}$ pour $q \leq n$. Alors $p + q = i$ donne

$p = i - q \geq -n$. Or dans ce cas $\mathcal{K}^p$ est une somme de copies de $\mathcal{O}(l)$ et on peut donc appliquer la proposition 6.24 qui donne

$$H^q(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{K}^p) \cong H^q(\mathbb{CP}^n, \mathcal{K}^p_{an})$$

pour $q \leq n$. Si maintenant $q \geq n+1$, les seuls termes $E_1^{p,q,alg}$ et $E_1^{p,q,an}$ qui pourraient différer sont les termes $H^{n+1}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{K})$ et $H^{n+1}(\mathbb{CP}^n, \mathcal{K}^{an})$. Or on sait que le premier terme est nul par le corollaire 2.32 et d'autre part, comme $\mathcal{K}^{an}$ est localement libre, on peut appliquer la résolution de Dolbeault qui s'arrête en degré n pour conclure qu'on a aussi $H^{n+1}(\mathbb{CP}^n, \mathcal{K}^{an}) = 0$. ■

Troisième partie

Variétés lisses et cohomologie de de Rham

7 Différentielles de Kähler

7.1 Module des différentielles

Les définitions qui suivent permettent de faire du calcul différentiel de façon axiomatique, et même sur des espaces singuliers. On considère des anneaux commutatifs $A \subset B$.

Définition 7.1 *Le module des différentielles de B relativement à A, noté $\Omega_{B/A}$, est le B-module engendré par les db, $b \in B$, avec les relations suivantes :*

1. *$da = 0$, $a \in A$.*
2. *(Règle de Leibniz) $d(bb') = bdb' + b'db$, b, $b' \in B$.*

A cause de ces propriétés, la différentielle

$$d : B \to \Omega_{B/A}$$

est A-linéaire.

Le B-module $\Omega_{B/A}$ satisfait la propriété universelle suivante :

Lemme 7.2 *Pour tout B-module M, et pour toute application A-linéaire*

$$D : B \to M,$$

satisfaisant les règles 1 et 2, il existe un unique morphisme de B-modules

$$f : \Omega_{B/A} \to M,$$

tel que $D = f \circ d$.

Démonstration. Comme $\Omega_{B/A}$ est engendré sur B par les db, $b \in B$, la formule

$$f(\sum_i b_i db'_i) = \sum_i b_i Db'_i \tag{44}$$

montre l'unicité. Par ailleurs, il faut voir que (44) détermine bien un morphisme de B-modules de $\Omega_{B/A}$ dans M. Or cela résulte du fait que les relations

$$\sum_i b_i db'_i = 0 \text{ in } \Omega_{B/A}$$

sont engendrées par 1 et 2, qui sont également satisfaites par D. ■

Corollaire 7.3 *Les dérivations de B relativement à A, c'est-à-dire les morphismes de A-modules $D : B \to B$ satisfaisant la règle de Leibniz, s'identifient au dual $Hom_B(\Omega_{B/A}, B)$.*

Remarque 7.4 On a supposé ici que A était un sous-anneau de B, ce qui n'est pas nécessaire. Il suffit d'avoir un morphisme d'anneaux de A dans B.

Lemme 7.5 *Soit $k \subset K$ une extension de corps, de degré de transcendance 0, c'est-à-dire que tout élément de K est algébrique sur k, et supposons $car.\, k = 0$. Alors $\Omega_{K/k} = 0$.*

Démonstration. Soit $\theta \in K$; θ satisfait une équation algébrique minimale $P(\theta) = 0$ à coefficients dans k. Soit $P(X) = X^N + \alpha_{N-1}X^{N-1} + \ldots + \alpha_0$. La règle de Leibniz montre que

$$0 = d(P(\theta)) = N\theta^{N-1}d\theta + (N-1)\alpha_{N-1}\theta^{N-2}d\theta + \ldots = P'(\theta)d\theta.$$

Comme $P'(\theta) \neq 0$ (du fait que $car.\, k = 0$), on a donc $d\theta = 0$. ■

Lemme 7.6 *Soient $A \subset B \subset C$ des inclusions d'anneaux. Alors on a une suite exacte :*

$$\Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B} \to 0$$

de C-modules.

Démonstration. Cela résulte de la présentation de $\Omega_{C/A}$ et $\Omega_{C/B}$. L'exactitude au milieu reflète le fait que les nouvelles relations pour $\Omega_{C/B}$ viennent de $db = 0$, $b \in B$. ■

Lemme 7.7 *Supposons $car.\, k = 0$ et soit $k \subset K$ une extension de corps de degré de transcendance n. Alors $\Omega_{K/k} = K^n$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\Omega_{K/k}$ est engendré sur K par $dX_1, \ldots, dX_n$, où K est de degré de transcendance nul sur $L \subset K$, $L \cong k(X_1, \ldots, X_n)$. Comme K s'écrit comme une succession d'extensions purement transcendantes de degré de transcendance 1 suivies d'une extension algébrique, les deux lemmes précédents montrent qu'il suffit de se ramener au cas où $K = k(X)$. Tout élément de K s'écrit donc $m = P(X)/Q(X)$, où P, Q sont des polynômes en X à coefficients dans k. On a alors

$$Q(X)m = P(X),$$

et la règle de Leibniz montre que

$$Q'(X)mdX + Q(X)dm = P'(X)dX.$$

Il en résulte que $\Omega_{k(X)/k}$ admet le générateur dX. Ce générateur n'est d'ailleurs pas nul car l'application

$$f(X) \mapsto f'(X),$$

où pour $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} \in k(X)$, on pose $f'(X) = \frac{P'(X)Q(X)-P(X)Q'(X)}{Q^2}$, avec $P'(X) = \sum_i ia_iX^{i-1}$ pour $P(X) = \sum_i a_iX^i \in k[X]$, qui envoie X sur 1, est une dérivation non triviale de $k(X)$.

Ce qui précède montre que $\Omega_{K/k}$ est engendré sur K par les dX_i. Il reste à voir que les dX_i sont indépendants sur K. D'après la propriété universelle de $\Omega_{K/k}$, il suffit de construire des k-dérivations $\frac{\partial}{\partial X_i}$ sur K ayant la propriété que

$$\frac{\partial}{\partial X_i}(X_j) = \delta_i^j.$$

Une telle dérivation existe naturellement sur $k(X_1, \ldots, X_n)$. D'autre part elle s'étend uniquement à K, car si $\theta \in K$ satisfait une équation

$$P(\theta) := \theta^n + \sum_{j<n} a_j\theta^j = 0,\ a_j \in L,$$

on doit avoir par la règle de Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial X_i}(\theta^n + \sum_{j<n} a_j\theta^j) = 0 = P'(\theta)\frac{\partial}{\partial X_i}(\theta) + \sum_{j<n}(\frac{\partial a_j}{\partial X_i})\theta^j,$$

ce qui détermine $\frac{\partial}{\partial X_i}(\theta)$ car $P'(\theta) \neq 0$. ■

7.2 Faisceau des différentielles

On va maintenant considérer un k-schéma de type fini X et introduire le faisceau des différentielles de Kähler $\Omega_{X/k}$. On a le lemme suivant :

Lemme 7.8 *Soit $A \subset B$ une inclusion d'anneaux commutatifs et soit $S \subset B$ une partie multiplicative. Soit B_S le localisé de B suivant S. Alors*

$$\Omega_{B_S/A} = \Omega_{B/A} \otimes_B B_S.$$

Démonstration. On a une application naturelle de $\Omega_{B/A} \otimes_B B_S$ dans $\Omega_{B_S/A}$, qui est donnée de la façon suivante : Soit d_S la différentielle de B_S sur A. La restriction de d_S à B satisfait les propriétés 1 et 2, et donc on a par la propriété universelle, une application de B-modules $\Omega_{B/A} \to \Omega_{B_S/A}$ qui s'étend, puisque $\Omega_{B_S/A}$ est un B_S-module, en un morphisme

$$\Omega_{B/A} \otimes B_S \to \Omega_{B_S/A}.$$

Inversement, pour construire une flèche de $\Omega_{B_S/A}$ dans $\Omega_{B/A} \otimes B_S = \Omega_{B/A,S}$, il suffit de construire une A-dérivation d'_S de B_S à valeur dans $\Omega_{B/A,S}$. Si $m \in B_S$, il existe $s \in S$, tel que $sm \in B$. Posons

$$dm = s^{-1}d(sm) - s^{-1}mds \in \Omega_{B/A,S}.$$

Il faut vérifier que c'est indépendant du choix de s. Le fait que c'est une A-dérivation est clair.

■

Soit $X = Spec\, A$ un schéma affine, où A est une k-algèbre de type fini. Soit $M = \Omega_{A/k}$, qui est un A-module (de type fini, voir plus loin). Pour tout $f \in A$, on a $\Omega_{A/k,f} = \Omega_{A_f/k}$ par le lemme 7.8. De même, pour tout μ idéal premier de A, on a $\Omega_{A/k,\mu} = \Omega_{A_\mu/k}$ (rappelons que A_μ est le localisé relativement à $S = A \setminus \mu$).

Le faisceau cohérent $\widetilde{M}$ associé à M sur $Spec\, A$ est donc le faisceau des différentielles de Kähler, qui à tout ouvert affine $Spec\, A_f$ associe le module des différentielles de Kähler de A_f relativement à k. Il en résulte que si X est un k-schéma de type fini arbitraire, on a un faisceau cohérent $\Omega_{X/k}$ sur k, obtenu en recollant les faisceaux cohérents décrits plus haut sur les ouverts affines. Le germe de ce faisceau au point $x \in X$ est $\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/k}$.

Le fait que si A est une k-algèbre de type fini, $\Omega_{A/k}$ est un A-module de type fini résulte du fait suivant :

Proposition 7.9 *Soit* $0 \to I \to B \to B' \to 0$ *une suite exacte, où* I *est un idéal de* B*, et l'anneau* B *est un* A*-module. Alors on a la suite exacte de* B'*-modules :*

$$I/I^2 \to \Omega_{B/A} \otimes_B B' \to \Omega_{B'/A} \to 0.$$

Démonstration. La flèche $I/I^2 \to \Omega_{B/A} \otimes B'$ est induite par la flèche composée :

$$d : I \to \Omega_{B/A} \to \Omega_{B/A} \otimes_B B'.$$

Du fait de la règle de Leibniz, cette flèche s'annule sur I^2. La surjectivité à droite résulte de la présentation de $\Omega_{B'/A}$. Le composé est nul à cause de cette même présentation. Il reste à voir l'exactitude au milieu. Elle est due à la présentation de $\Omega_{B/A} \otimes B'$, $\Omega_{B'/A}$ et à la règle de Leibniz. En effet, $\Omega_{B'/A}$ est engendré sur B' par les db', $b' \in B'$, avec les relations

$$da = 0,\ a \in Im\,(A \to B),\ d(b'b'') = b'db'' + b''db',\ b',\ b'' \in B'. \tag{45}$$

Or $\Omega_{B/A} \otimes_B B'$ est engendré sur B' par les db, $b \in B$, avec les relations

$$da = 0,\ a \in Im\,(A \to B),\ d(b'b'') = \overline{b'}db'' + \overline{b''}db',\ b',\ b'' \in B, \tag{46}$$

où $\overline{b'}$, $\overline{b''}$ sont les images respectives de b' et b'' dans B'. Les relations (46) s'envoient donc surjectivement sur les relations (45), de sorte que le noyau de la flèche

$$\Omega_{B/A} \otimes_B B' \to \Omega_{B'/A}$$

est engendré par le noyau de la flèche naturelle de B'-modules entre le B'-module libre engendré par les db, $b \in B$ et le B'-module libre engendré par les db', $b' \in B'$. De toute évidence ce noyau est engendré sur B' par les dj, $j \in I$.

■

Corollaire 7.10 *Si* A *est une* k*-algèbre quotient de* $k[X_1, \ldots, X_n]$*,* $\Omega_{A/k}$ *est un* A*-module engendré par* n *éléments.*

En effet, $\Omega_{k[X_1,\ldots,X_n]/k}$ est le $k[X_1, \ldots, X_n]$-module libre de base $dX_1, \ldots, dX_n$. (Montrer...) ■

Fonctorialité. Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme de k-schémas. On dispose alors d'un morphisme de "pull-back"

$$\phi^* : \phi^*\Omega_{Y/k} \to \Omega_{X/k}.$$

Ce morphisme est obtenu en considérant le morphisme de faisceaux d'anneaux sur X

$$\phi^* : \phi^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X.$$

Ce morphisme est un morphisme de k-algèbres et il induit donc un morphisme de faisceaux de $\phi^{-1}\mathcal{O}_Y$-modules

$$\phi^* : \phi^{-1}\Omega_{Y/k} \to \Omega_{X/k},$$

qui à son tour induit

$$\phi^* : \phi^*\Omega_{Y/k} = \phi^{-1}\Omega_{Y/k} \otimes_{\phi^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/k}.$$

Le morphisme ϕ^* est appelé la différentielle de ϕ.

7.3 Régularité

Soit A une k-algèbre de type fini, et $\mathcal{M}$ un idéal premier de A. Considérons l'anneau local $\mathcal{O} := A_{\mathcal{M}}$. C'est un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M}$. Le corps résiduel $k_0 = \mathcal{O}/\mathcal{M}$ est une extension finie de k si et seulement si $\mathcal{M}$ est maximal. La dimension n de $\mathcal{O}$ est alors égale à la dimension en $\mathcal{M}$ de $Spec\, A$, où encore à la dimension maximale d'un quotient A/μ_i où μ_i est un idéal premier minimal de A contenu dans $\mathcal{M}$. La dimension d'un tel quotient intègre est définie comme le degré de transcendance sur k du corps $Frac(A/\mu_i)$ (cf section 1.4).

Lemme 7.11 *On a $n \leq rang_{k_0}\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$.*

Démonstration. Supposons d'abord $k = k_0$, de sorte que $\mathcal{M}$ correspond à un k-point de $Spec\, A$. Soient $m_1, \dots, m_l \in \mathcal{M}$ tels que leurs classes modulo $\mathcal{M}^2$ forment une base de $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ sur k. Alors par Nakayama les m_i engendrent l'idéal $\mathcal{M}$. De même les $P(m_i)$ avec P homogène de degré r à coefficients dans $\mathcal{O}$ engendrent $\mathcal{M}^r$, ou encore les $P(m_i)$ avec P homogène de degré r à coefficients dans k engendrent $\mathcal{M}^r/\mathcal{M}^{l+1}$. On en déduit que l'on a une surjection

$$k[[x_1, \dots, x_l]] \twoheadrightarrow \widehat{\mathcal{O}}, \tag{47}$$

obtenue en prenant les complétés de

$$k[x_1, \dots, x_l] \to \mathcal{O},$$

$$P(x_1, \dots, x_l) \mapsto P(g_1, \dots, g_l).$$

Le terme de droite de (47) est de même dimension que $\mathcal{O}$ et le terme de gauche est de dimension égale à l. D'où $l \geq dim\, \mathcal{O}$.

Le cas général s'en déduit par un changement de scalaires. ■

Définition 7.12 *L'anneau local $\mathcal{O}$ est dit régulier si on a l'égalité $n = rang_{k_0}\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$. Dans ce cas, les m_i utilisés plus haut sont appelés des paramètres locaux pour $\mathcal{O}$.*

La démonstration ci-dessus montre que si $\mathcal{O}$ est régulier, il est intègre et en particulier réduit. En effet, si le corps résiduel est isomorphe à k, (ce qu'on peut supposer par un changement de scalaires), son complété formel est isomorphe à un corps de séries formelles à n variables.

Définition 7.13 *Un k-schéma X de type fini est dit lisse si ses anneaux locaux aux points fermés de X sont réguliers.*

On va supposer désormais que $car.\, k = 0$.

Proposition 7.14 *Supposons X irréductible et réduit. Alors X est lisse si et seulement si $\Omega_{X/k}$ est localement libre de rang $n = dim\, X$.*

On doit utiliser le résultat suivant :

Lemme 7.15 *Soit x un point fermé de X correspondant à un idéal maximal $\mathcal{M}$ d'un anneau A tel que $U = Spec\, A$ est un ouvert affine de X. Alors on a un isomorphisme de $k(x)$-espaces vectoriels :*

$$\mathcal{M}/\mathcal{M}^2 \cong \Omega_{X/k,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x).$$

Démonstration. On utilise la proposition 7.9 appliquée au morphisme surjectif

$$\mathcal{O}_{X,x} \to k(x),$$

de noyau $\mathcal{M}$. Comme $k(x)$ est une extension algébrique de k, on a, par le lemme 7.5, $\Omega_{k(x)/k} = 0$ et cette suite exacte fournit donc :

$$\mathcal{M}/\mathcal{M}^2 \to \Omega_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \to 0.$$

Il reste à montrer que cette flèche est un isomorphisme.

Supposons d'abord $k(x) = k$. Alors on construit un inverse de la flèche ci-dessus en utilisant la propriété universelle de $\Omega_{X/k,x}$. Pour cela, considérons l'application $ev_x : \mathcal{O}_{X,x} \to k(x) = k$ de noyau $\mathcal{M}$. Comme on a aussi $i : k \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ (les constantes), on a donc une application

$$D_x : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{M}/\mathcal{M}^2,$$

qui à f associe la classe de $f - i(ev_x(f))$ modulo $\mathcal{M}^2$. On vérifie que c'est une k-dérivation de $\mathcal{O}_{X,x}$ à valeurs dans le k-espace vectoriel $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$, qui est donc induite d'après le lemme 7.2 par un morphisme de $\Omega_{X,x} \to \mathcal{M}/\mathcal{M}^2$. Un tel morphisme fournit aussi

$$\Omega_{X,x} \otimes k \to \mathcal{M}/\mathcal{M}^2.$$

Le cas général se fait par une extension des scalaires $k \subset k(x)$, où $X_{k(x)}$ est un $k(x)$-schéma de type fini, avec un $k(x)$-point x. On doit vérifier que $\Omega_{X_{k(x)}/k(x)}$ est simplement le faisceau $\Omega_{X/k}$ étendu à $X_{k(x)}$, ce qui résulte immédiatement de la définition. ∎

Démonstration de la proposition 7.14. Comme X est irréductible, on a $\Omega_{X/k,gen} = \Omega_{k(X)/k}$ qui est un k-espace vectoriel de rang $n = dim\, X$ par le lemme 7.7. Dire que $\Omega_{X/k}$ est localement libre équivaut par le lemme 7.16 suivant à dire que pour tout point fermé x de X, on a

$$rang_{k(x)}\Omega_{X/k,x} \otimes k(x) = rang_{k(X)}\Omega_{X/k,gen}.$$

Dans notre cas, le terme de droite est égal à $dim\, X$ et le terme de gauche est égal à $rang_{k(x)}\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2$ par le lemme 7.15. Donc l'égalité des rangs équivaut au fait que les anneaux locaux de X aux points fermés sont réguliers. ∎

On a utilisé le fait suivant.

Lemme 7.16 *Soit X un k-schéma irréductible et réduit et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors $\mathcal{F}$ est localement libre si et seulement si*

$$rang_{k(X)}\mathcal{F}_{gen} = rang_{k(x)}\mathcal{F}_x \otimes k(x)$$

pour tout point fermé de x.

Démonstration. Soit x un point fermé de X et supposons qu'on ait

$$rang_{k(X)}\mathcal{F}_{gen} = rang_{k(x)}\mathcal{F}_x \otimes k(x) := N.$$

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathcal{F}_x$ tels que leurs réductions modulo $\mathcal{M}_x\mathcal{F}_x$ forment une base de $\mathcal{F}_x \otimes k(x)$ sur $k(x)$. Alors par Nakayama, les α_i engendrent $\mathcal{F}_x$. Il en résulte que les α_i engendrent $\mathcal{F}_{gen}$ sur $k(X)$. Comme on a l'égalité des rangs sur $k(X)$, le noyau de l'application

$$\mathcal{O}_{X,x}^N \to \mathcal{F}_x$$

donnée par les α_i est trivial. Donc cette flèche est un isomorphisme et il en résulte que c'est un isomorphisme au voisinage de x. Donc $\mathcal{F}$ est localement libre au voisinage de x, et comme les points fermés sont de toute évidence denses dans X, $\mathcal{F}$ est localement libre. La réciproque est évidente. ∎

7.4 Résolutions finies

Théorème 7.17 *Soit $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ un anneau local régulier noetherien qui est le localisé d'une k-algèbre de type fini, de corps résiduel $k_0 = \mathcal{O}/\mathcal{M}$. Alors on a une résolution finie du $\mathcal{O}$-module k_0 par des $\mathcal{O}$-modules libres de rang fini.*

Démonstration. Soient g_i, $i = 1, \ldots, dim\, \mathcal{O} = n$ des éléments de $\mathcal{M}$ dont la réduction modulo $\mathcal{M}^2$ forment une base de $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ comme k_0-espace vectoriel. Soit V le $\mathcal{O}$-module libre de base e_i, et considérons le complexe de Koszul $K.$ défini par

$$K_i = \bigwedge^i V,\ \delta_i(e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_i}) = \sum_{1 \leq l \leq i} (-1)^l g_{j_l} e_{j_1} \wedge \ldots \hat{e_{j_l}} \ldots \wedge e_{j_i}.$$

Les premiers termes de ce complexe sont évidemment

$$\mathcal{O}^n \to \mathcal{O},\ (a_i) \mapsto \sum_i g_i a_i,$$

dont l'image est $\mathcal{M}$ par Nakayama. Il faut montrer que ce complexe est exact. Or la suite g_i est une suite régulière dans $\mathcal{O}$. En effet, $\mathcal{O}$ est intègre de dimension n et $\mathcal{M}$ est engendré par les g_i. Donc

$$dim\,\mathcal{O}/ < g_1, \ldots, g_n >= dim\, k_0 = 0 = dim\,\mathcal{O} - n.$$

On applique alors la caractérisation donnée dans la section 3.4 des suites régulières.

Or la différentielle de Koszul δ envoie chaque terme $\bigwedge^i V \otimes \mathcal{M}^j$ dans $\bigwedge^{i-1} V \otimes \mathcal{M}^{j+1}$. Pour voir l'exactitude du complexe de Koszul $K.$, il suffit de vérifier l'exactitude des complexes de Koszul $Gr^j(K.)$, définis comme les gradués du complexe de Koszul pour la filtration F donnée par $F^j K_i = \mathcal{M}^{j-i} K_i$.

En effet, supposons l'exactitude de ces derniers pour tout j. Alors si on a $a_i \in K_i$, $\delta(a_i) = 0$, on trouve que $a_i \in Im\,\delta$ modulo $\mathcal{M}^j$ pour tout j, ce qui entraîne que $a_i \in Im\,\delta$.

Or d'après la proposition 3.14, on a $\mathcal{M}^j/\mathcal{M}^{j+1} \cong k_0[X_1, \ldots, X_n]_j$, (partie graduée de degré j), où l'isomorphisme inverse envoie $P(X_1, \ldots, X_n)$ sur $P(g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{M}^j/\mathcal{M}^{j+1}$.

On est donc ramené à montrer que le complexe de Koszul

$$\ldots \bigwedge^{i+1} V \otimes k_0[X_1, \ldots, X_n] \to \bigwedge^{i} V \otimes k_0[X_1, \ldots, X_n] \to \bigwedge^{i-1} V \otimes k_0[X_1, \ldots, X_n] \ldots \tag{48}$$

où les différentielles sont $k_0[X_1, \ldots, X_n]$-linéaires et données par

$$\delta(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_l}) = \sum_s (-1)^s X_{i_s} e_{i_1} \wedge \ldots \hat{e_{i_s}} \ldots \wedge e_{i_l}$$

est exact.

Une preuve de ce résultat consiste à utiliser les théorèmes d'annulation pour la cohomologie de l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}_{k_0} = Proj\, k_0[X_1, \ldots, X_n]$. Sur $\mathbb{P}^{n-1}_{k_0}$, on voit V comme une base de $H^0(\mathbb{P}^{n-1}_{k_0}, \mathcal{O}(1))$, et on a la flèche d'évaluation

$$\tau : V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}_{k_0}} \to \mathcal{O}(1) \to 0.$$

De façon évidente, cette flèche surjective fournit pour tout l un complexe exact de faisceaux localement libres sur $\mathbb{P}^{n-1}_{k_0}$:

$$\bigwedge^{i+1} V \otimes \mathcal{O}(l-1) \to \bigwedge^{i} V \otimes \mathcal{O}(l) \to \bigwedge^{i-1} V \otimes \mathcal{O}(l+1) \to \ldots \tag{49}$$

où les différentielles δ sont $\mathcal{O}$-linéaires et données par

$$\delta(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_l}) = \sum_s (-1)^s \tau(e_{i_s}) e_{i_1} \wedge \ldots \hat{e_{i_s}} \ldots \wedge e_{i_l}.$$

Clairement le complexe de Koszul (48) est la somme directe sur $l \in \mathbb{Z}$ des sections globales des complexes (49). Le fait que ces complexes restent exacts au niveau des sections globales est en fait une conséquence de l'annulation des $H^i(\mathbb{P}^{n-1}_{k_0}, \mathcal{O}(l))$, $0 < i < n-1$ (théorème 2.36) et de l'annulation de $H^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}_{k_0}, \mathcal{O}(l))$ pour $l \geq -n+1$ (théorème 2.38), comme le montre le scindage du complexe ci-dessus en suites exactes courtes.

■

Corollaire 7.18 *Soit $\mathcal{O}$ un anneau local noetherien régulier qui est le localisé d'une k-algèbre de type fini. Alors tout $\mathcal{O}$-module de type fini M admet une résolution finie à gauche par des $\mathcal{O}$-modules libres de type fini.*

Démonstration. Comme M est de type fini, il existe une surjection $\mathcal{O}^{r_0} \to M \to 0$. Comme $\mathcal{O}$ est noethérien, le noyau K de cette surjection est de type fini et il existe donc une surjection

$$\mathcal{O}^{r_1} \to K \to 0.$$

On peut continuer ainsi jusqu'au cran n, ce qui donne une résolution à gauche de la forme :

$$0 \to M' \to \mathcal{O}^{r_{n-1}} \to \ldots \to \mathcal{O}^{r_0} \to M \to 0.$$

On se propose de montrer que M' est un $\mathcal{O}$-module libre. On utilise le lemme 7.19 suivant. Il suffit donc de montrer que $Tor_1^{\mathcal{O}}(M', k_0) = 0$. Or en scindant la résolution ci-dessus en suites exactes courtes

$$0 \to M_{i+1} \to \mathcal{O}^{r_i} \to M_i \to 0,$$

où $M_n = M'$ et $M_0 = M$ on trouve que

$$Tor_l^{\mathcal{O}}(M_{i+1}, k_0) = Tor_{l+1}^{\mathcal{O}}(M_i, k_0),\ l > 0.$$

Il en résulte que $Tor_1^{\mathcal{O}}(M', k_0) = Tor_{n+1}^{\mathcal{O}}(M, k_0)$. Or ceci vaut 0 car k_0 admet une résolution à gauche de longueur $\leq n$ par des $\mathcal{O}$-modules libres.

■

Lemme 7.19 *Soit $\mathcal{O}$ un anneau local noethérien de corps résiduel k_0. Un $\mathcal{O}$-module de type fini M est libre si et seulement si $Tor_1^{\mathcal{O}}(M, k_0) = 0$.*

Démonstration. Soit $m_i \in M$, $1 \leq i \leq N$ des éléments tels que leurs réductions modulo $\mathcal{M}M$ forment une base de $M \otimes k_0$. Alors les m_i engendrent M par Nakayama, et on a une surjection $\mathcal{O}^N \to M \to 0$ donnée par les m_i. Soit R le noyau, qui est un $\mathcal{O}$-module de type fini. La surjection ci-dessus induit un isomorphisme après tensorisation par k_0. Mais d'autre part on a la suite exacte des Tor :

$$Tor_1^{\mathcal{O}}(M, k_0) \to R \otimes k_0 \to k_0^N \to M \otimes k_0 \to 0.$$

Comme $Tor_1^{\mathcal{O}}(M, k_0) = 0$, on a $R \otimes k_0 = 0$, et donc $R = 0$ par Nakayama.

■

7.5 Sous-variétés lisses et éclatements

Soit Y un k-schéma lisse de type fini, et soit $X \subset Y$ un sous k-schéma lisse connexe, défini par le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$.

Proposition 7.20 *X est alors localement intersection complète. Le faisceau $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules libres, et l'on a la suite exacte*

$$0 \to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega_{Y|X} \to \Omega_X \to 0 \tag{50}$$

de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules libres.

Le faisceau $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est appelé le faisceau conormal de X dans Y. Son dual, le faisceau normal de X dans Y est noté $\mathcal{N}_{X/Y}$.

Preuve de la proposition 7.20. On sait d'après la proposition 7.14 que les faisceaux $\Omega_{Y/k|X}$ et $\Omega_{X/k}$ sont localement libres de rangs respectifs $dim\, Y$ et $dim\, X$ respectivement (où l'on suppose ici X connexe pour simplifier). D'autre part on a la suite exacte de la proposition 7.9

$$\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2 \to \Omega_{Y|X} \to \Omega_X \to 0. \tag{51}$$

Soit $\mathcal{H}$ le noyau de la flèche de restriction. On a donc une surjection

$$\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2 \to \mathcal{H}$$

et $\mathcal{H}$ est localement libre sur X comme noyau d'une application surjective entre faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules libres. De plus $\mathcal{H}$ est de rang égal à $rang\, \Omega_{Y|X} - rang\, \Omega_X = dim\, Y - dim\, X := e$.

Soit $x \in X$; dans un voisinage ouvert suffisamment petit U de x dans Y, soient $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_e} \in \Gamma(U \cap X, \mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ tels que leurs images dans $\mathcal{H}$ forment une base de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{O}_X$, et soient $g_1, \ldots, g_e \in \Gamma(U, \mathcal{I}_X)$ des relèvements de $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_e}$ dans $\mathcal{I}_X$.

Soit $X' \subset U$ le sous-schéma défini par $g_1, \ldots, g_e$. On va montrer que $X = X'$ au voisinage de x. Notons que comme $\mathcal{I}_{X'}(U)$ est engendré par $g_1, \ldots, g_e \in \mathcal{I}_X(U)$, on a l'inclusion schématique

$$X \cap U \subset X' \cap U.$$

Mais d'autre part, le critère jacobien (lemme 7.21 suivant) dit que X' est localement intersection complète et lisse de codimension e au voisinage de x. En particulier X' est irréductible et réduit au voisinage de x. Comme X et X' sont irréductibles de la même dimension au voisinage de x, on en déduit qu'il existe un ouvert $V \subset Y$ contenant x tel que $X \cap V = X' \cap V$ schématiquement. Donc X est aussi localement intersection complète.

De plus, on a en fait $\mathcal{I}_X = \mathcal{I}_{X'}$ dans V, et en particulier on en déduit que $\mathcal{I}_X$ est engendré par $g_1, \ldots, g_e$. Il en résulte qu'on a en fait

$$\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2 \cong \mathcal{H}$$

et donc que $\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2 = \mathcal{H}$ est localement libre sur X de rang $dim\, Y - dim\, X$.

De plus, comme $\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2 \cong \mathcal{H}$, la suite (50) est exacte par définition de $\mathcal{H}$. ■

Le critère suivant pour la lissité d'un sous-schéma est appelé le *critère jacobien*.

Lemme 7.21 *Si Y est un k-schéma de type fini lisse et $X' \subset Y$ est un sous-schéma décrit par des équations $g_1, \ldots, g_e$ ayant la propriété que les différentielles dg_i sont indépendantes dans $\Omega_{Y|x}$ en tout point x de X', alors X' est lisse de codimension e.*

Démonstration. Soit $\mathcal{I}'$ le faisceau d'idéaux de X' dans Y. L'hypothèse est que $\mathcal{I}'$ est localement engendré par e éléments aux différentielles indépendantes en tout point de X'. Pour tout $x \in X'$, la flèche

$$d_x : \mathcal{I}'/\mathcal{M}_x\mathcal{I}' = \mathcal{I}'_x \otimes_{\mathcal{O}_{Y,x}} k(x) \to \Omega_{Y|x}$$

est injective de rang e. De façon équivalente, la flèche

$$\mathcal{I}'/\mathcal{I}'^2 \otimes_{\mathcal{O}_{X',x}} k(x) \to \Omega_{Y|x} \cong \mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2$$

est injective de rang e. Soit $\mathcal{N}_x$ l'idéal de x dans X'. Alors $\mathcal{N}_x/\mathcal{N}_x^2$ est le quotient de $\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2$ par l'image de $\mathcal{I}'_x \subset \mathcal{M}_x$ dans $\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2$. Comme cette image est de rang e, et que Y est lisse de dimension n, on conclut que

$$dim_{\,k_0}\mathcal{N}_x/\mathcal{N}_x^2 = n - e.$$

Mais d'autre part, X' étant défini par e équations dans un schéma lisse de dimension n, son anneau local $\mathcal{O}_{X',x}$ est de dimension $\geq n - e$.

Il en résulte par le lemme 7.11 qu'on a en fait

$$dim_{\,k_0}\mathcal{N}_x/\mathcal{N}_x^2 = dim\,\mathcal{O}_{X',x}$$

c'est-à-dire que $\mathcal{O}_{X',x}$ est régulier. En particulier X' est réduit et irréductible au voisinage de x.

Par ailleurs, on a vu ci-dessus que la suite

$$0 \to \mathcal{I}'/\mathcal{I}'^2 \to \Omega_{Y|X'} \to \Omega_{X'} \to 0,$$

est exacte, et que la flèche de gauche est injective *sur les fibres* en tout point x de X' (c'est-à-dire après tensorisation par $k(x)$). Il en résulte d'après le lemme 7.22 suivant que $\mathcal{I}'/\mathcal{I}'^2$ est localement libre sur X' de rang e et que $\Omega_{X'}$ est localement libre. Comme on sait que X' est irréductible et réduit, on peut alors appliquer la caractérisation 7.14 pour conclure que X' est lisse. ■

Lemme 7.22 *Soit $\mathcal{O}$ un anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathcal{M}$, de corps résiduel $k_0 = \mathcal{O}/\mathcal{M}$, et soit M un $\mathcal{O}$-module engendré par e éléments. Soit*

$$f : M \to \mathcal{O}^n$$

un morphisme ayant la propriété que la flèche induite $M \otimes_{\mathcal{O}} k_0 \to k_0^n$ est de rang e. Alors M est libre, f est injectif, et le conoyau de f est libre.

Démonstration. Considérons la flèche $\mathcal{O}^e \to M$ donnée par un choix de générateurs de M. L'application composée $g : \mathcal{O}^e \to \mathcal{O}^n$ satisfait la propriété que l'application induite modulo $\mathcal{M}$

$$\overline{g} : k_0^e \to k_0^n$$

est injective, puisqu'elle est de rang e. Soit $\overline{\sigma} : k_0^n \to k_0^e$ un inverse à gauche de $\overline{g}$, c'est-à-dire

$$\overline{\sigma} \circ \overline{g} = Id_{k_0^e}.$$

Soit $\sigma : \mathcal{O}^n \to \mathcal{O}^e$ un relèvement de $\overline{\sigma}$. Alors $\sigma \circ g : \mathcal{O}^e \to \mathcal{O}^e$ est inversible car son déterminant vaut 1 modulo $\mathcal{M}$. Soit τ son inverse. On trouve alors que $\tau \circ \sigma$ est un inverse à gauche de g. Mais comme g admet un inverse à gauche, f admet aussi un inverse à gauche. Il en résulte immédiatement que M est libre, f est injectif, et le conoyau de f est libre.

■

Remarque 7.23 Pour un sous-schéma localement intersection complète de faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$, il est toujours vrai qu'on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega_{Y|X} \to \Omega_X \to 0,$$

où le faisceau $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est localement libre de rang $dim\, Y - dim\, X$ sur X. On a donc un faisceau conormal localement libres. Néanmoins, si X n'est pas lisse, la suite ci-dessus n'est pas une suite exacte de faisceaux localement libres, et elle ne reste pas exacte en tout point, c'est-à-dire après localisation en x et tensorisation par $k(x)$.

Fibré canonique. Le fibré canonique d'un k-schéma lisse de type fini Y de dimension n est le faisceau inversible défini comme la puissance extérieure maximale

$$K_Y := \bigwedge^n \Omega_Y$$

du faisceau localement libre Ω_Y de rang n. De la suite exacte (50), on déduit en prenant les puissances extérieures maximales un isomorphisme canonique (la formule d'adjonction) :

$$K_X \cong K_{Y|X} \otimes det\, \mathcal{N}_{X/Y}, \tag{52}$$

où le déterminant d'un faisceau localement libre est le fibré en droites donné par sa puissance extérieure maximale.

Il se trouve qu'on peut définir un fibré canonique pour certaines variétés singulières, dites Gorenstein. Cette catégorie inclut les sous-variétés $X \subset Y$ localement intersections complètes, avec Y lisse, et on a aussi dans ce cas la formule d'adjonction

$$K_X \cong K_{Y|X} \otimes det\, \mathcal{N}_{X/Y}.$$

Le fibré canonique apparaîtra sous la forme du faisceau dualisant dans la section 9.

7.5.1 Eclatements

Soit X un k-schéma de type fini irréductible et soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau d'idéaux non nul sur X. L'éclatement $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$ de X le long de $\mathcal{I}$ est défini comme

$$\widetilde{X}_{\mathcal{I}} = Proj\ \oplus_{k \geq 0} \mathcal{I}^n.$$

Cela signifie que $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$ est obtenu en recollant les schémas $Proj\ \oplus_{k\geq 0} I^n$ définis au-dessus des ouverts affines $U = Spec\, A$ de X, où $I = \Gamma(U, \mathcal{I})$, au-dessus des intersections $U_i \cap U_j$, via les isomorphismes naturels.

Comme tout schéma "*Proj*", $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$ possède un faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ (cf section 2.3.2). Par définition, les sections de ce faisceau $\mathcal{O}(1)$ sont obtenues sur un ouvert V de $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$ où $f \neq 0$ pour un élément homogène $f \in \oplus_{k\geq 0} I^n$, en prenant les éléments de degré 1 de l'algèbre $\oplus_{k\geq 0}\mathcal{I}^n$ localisée le long de f. Soit $\pi : \widetilde{X}_{\mathcal{I}} \to X$ le morphisme canonique.

Lemme 7.24 *Le faisceau $\mathcal{O}(1)$ de $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$ est canoniquement isomorphe à l'image inverse de l'idéal $\mathcal{I}$, c'est-à-dire l'image dans $\mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}$ de $\pi^*\mathcal{I}$.*

Démonstration. Par définition de $\mathcal{O}(1)$, et du fait que l'algèbre $\oplus_{k\geq 0}\mathcal{I}^n$ est engendrée en degré 1, on a une application surjective $\pi^*\mathcal{I} \to \mathcal{O}(1)$. Par ailleurs on a une application naturelle $\pi^*\mathcal{I} \to \mathcal{O}_{\widetilde{X}_\mathcal{I}}$ induite par l'inclusion $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$, induisant

$$\pi^*\mathcal{I} \to \pi^*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\widetilde{X}_\mathcal{I}}.$$

L'image de cette flèche est par définition l'image inverse $\pi^*\mathcal{I}.\mathcal{O}_{\widetilde{X}_\mathcal{I}}$ de $\mathcal{I}$.

On va montrer que $\pi^*\mathcal{I}.\mathcal{O}_{\widetilde{X}_\mathcal{I}}$ est inversible et que ces deux flèches ont le même noyau.

C'est un problème local, et donc on peut supposer que $\mathcal{I}$ est globalement engendré sur X. Soient $a_0, \ldots, a_r$ des générateurs pour I, et soit W le k-espace vectoriel de base A_i, $i = 0, \ldots, r$. On a une application surjective

$$e : \oplus Sym^l W \otimes \mathcal{O}_X \to \oplus \mathcal{I}^l$$

envoyant A_i sur a_i, qui est un morphisme surjectif d'$\mathcal{O}_X$-algèbres graduées. Cette surjection fournit un plongement

$$\widetilde{X}_\mathcal{I} \subset X \times_k \mathbb{P}(W^*).$$

Notons qu'on a évidemment $e(a_iA_j - a_jA_i) = 0$, et on en déduit que les fonctions (homogènes en les secondes variables) $\pi^*a_iA_j - \pi^*a_jA_i$ s'annulent sur $\widetilde{X}_\mathcal{I}$. Soit maintenant $x \in \widetilde{X}_\mathcal{I}$ un point. Alors on a pour un l, $A_l(x) \neq 0$, et les fonctions rationnelles $\frac{A_i}{A_l}$ sont définies en x. De plus les équations $\pi^*a_iA_j - \pi^*a_jA_i = 0$, $\forall i, j$, fournissent dans $\mathcal{O}_{\widetilde{X}_\mathcal{I}}$:

$$\pi^*a_i = \frac{A_i}{A_l}\pi^*a_l,$$

montrant que l'idéal $\pi^*I \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}_\mathcal{I}}$ est engendré par un seul générateur π^*a_l qui est non nul. Donc on a bien montré que cet idéal est inversible, car les anneaux locaux de $\widetilde{X}_\mathcal{I}$ sont intègres.

Pour conclure, considérons les flèches composées (qui sont surjectives à valeurs dans des fibrés en droites)

$$f : W \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}_\mathcal{I}} \to \pi^*\mathcal{I} \to \mathcal{O}(1),$$

et

$$g : W \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}_\mathcal{I}} \to \pi^*\mathcal{I} \to \pi^*\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}_\mathcal{I}}.$$

On va vérifier que leurs noyaux coïncident. Par définition de $\mathcal{O}(1)$, le noyau $W_x \subset W$ de f au point x est engendré par $A_j - \frac{A_j}{A_l}(x)A_l$. Pour ce qui est de g, comme on a les relations

$$\pi^*a_i = \frac{A_i}{A_l}\pi^*a_l,$$

on trouve que le noyau de g au point x contient aussi les $A_j - \frac{A_j}{A_l}(x)A_l$ qui sont envoyées par g sur $a_i - \frac{A_j}{A_l}(x)a_l$. On en conclut qu'on a une application surjective

$$\mathcal{O}(1) \to \pi^*\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}_\mathcal{I}},$$

et comme les deux faisceaux considérés sont inversibles, cette application est nécessairement un isomorphisme. ∎

Exemple 7.25 *Supposons que $\mathcal{I}$ est un faisceau inversible. Alors on a $\widetilde{X}_{\mathcal{I}} \cong X$ et $\mathcal{O}(1) = \mathcal{I}$.*

En effet, localement $\mathcal{I} = \mathcal{O}$, de sorte que

$$\oplus \mathcal{I}^l = \mathcal{O}[X],$$

et $Proj\, \mathcal{O}[X] = X$. Le faisceau $\mathcal{O}(1)$ est l'image inverse de $\mathcal{I}$ donc égal à $\mathcal{I}$. ■

Diviseur exceptionnel Le diviseur exceptionnel E de l'éclatement est le sous-schéma défini par le faisceau d'idéaux inversible $\pi^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}$. Si Z est le sous-schéma défini par $\mathcal{I}$, π fournit un isomorphisme $\widetilde{X}_{\mathcal{I}} \setminus E \cong X \setminus Z$, du fait $\mathcal{I} \cong \mathcal{O}_X$ en dehors de Z, et par l'exemple 7.25.

Lemme 7.26 *Le diviseur exceptionel est isomorphe à Proj $\oplus_{l \geq 0} \mathcal{I}^l/\mathcal{I}^{l+1}$, où l'on voit $\oplus_{l \geq 0} \mathcal{I}^l/\mathcal{I}^{l+1}$ comme un faisceau d'algèbres graduées sur Z.*

A montrer en exercice.

7.5.2 Propriété universelle

Théorème 7.27 *Soit $\mathcal{I}$ un faisceau d'idéaux sur X, un k-schéma irréductible. Soit W un k-schéma irréductible de type fini et $\psi : W \to X$ un morphisme dominant. Alors il existe un morphisme $\tilde{\psi} : W \to \widetilde{X}_{\mathcal{I}}$ tel que $\psi = \pi \circ \tilde{\psi}$ si et seulement si l'image inverse $\psi^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_W \subset \mathcal{O}_W$ est un faisceau inversible. De plus $\tilde{\psi}$ est unique.*

Démonstration. La condition est nécessaire : en effet, supposons que ψ se relève en $\tilde{\psi}$. Alors

$$\tilde{\psi}^{-1}(\tau^{-1}\mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_W = \psi^{-1}(\mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_W$$

et le terme de gauche est un faisceau d'idéaux inversibles car $\tau^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}$ est inversible donc localement engendré par un seul élément, et de plus W est irréductible et domine $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$. (Noter que $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$ est aussi irréductible, de corps de fractions isomorphe à celui de X.)

Pour la réciproque, c'est un énoncé local au-dessus de X et donc on peut supposer que X est affine, $X = Spec\, A$, et $\mathcal{I}$ est associé à $I \subset A$. On a l'application naturelle $\psi^* I \to \psi^{-1}(I) \cdot \mathcal{O}_W$ et le terme de droite, disons $\mathcal{L}$, est par hypothèse inversible. Plus généralement I induit aussi une surjection $I^n \to \mathcal{L}^{\otimes n}$ pour tout $n \geq 0$. Par la propriété universelle des $Proj$, l'application naturelle

$$\oplus I^n \to \oplus \Gamma(\mathcal{L}^{\otimes n})$$

induit un morphisme $\tilde{\psi} : W \to Proj \oplus I^n$, dont on vérifie qu'elle relève ψ.

L'unicité est claire vu que π est birationnelle et W irréductible, dominant X, de sorte que $\tilde{\psi}$ est déterminé par ψ sur un ouvert dense de W. ■

7.5.3 Cas localement intersection complète

Supposons que l'idéal $\mathcal{I}$ soit localement engendré par une suite régulière $g_1, \ldots, g_r$, c'est-à-dire que Z soit localement intersection complète de codimension r.

Lemme 7.28 *On peut alors décrire l'éclatement de X le long de Z (c'est-à-dire de $\mathcal{I}$) localement de la façon suivante : Soit U un ouvert de X où Z est défini par r équations. Alors $\pi^{-1}(U) \subset \widetilde{X}_{\mathcal{I}}$ est réalisé comme le sous-schéma de $U \times \mathbb{P}^{r-1}$ décrit par les équations $X_i g_j = X_j g_i$.*

Démonstration. On a en effet déjà noté que ces relations ont lieu automatiquement sur l'éclaté. Il reste à comprendre pourquoi l'éclaté est exactement décrit par ces équations. Revenant à la preuve du lemme 7.24, et introduisant de même le k-espace vectoriel W de base X_i, on voit que les équations définissant localement $\pi^{-1}(U) \subset \widetilde{X}_{\mathcal{I}}$ dans $U \times \mathbb{P}^{r-1}$ sont données par le noyau de l'application

$$e : \oplus Sym^l W \otimes \mathcal{O}_X \to \oplus \mathcal{I}^l$$

envoyant X_i sur g_i.

Mais comme les g_i forment une suite régulière, le noyau de e est engendré par les relations $X_i g_j = X_j g_i$. En effet, en dehors de Z, l'une des fonctions g_i est inversible, et les relations $X_i g_j = X_j g_i$ fournissent $X_j / X_i = g_j / g_i$ de sorte que le quotient de $\oplus Sym^l W \otimes \mathcal{O}_X$ par ces relations est isomorphe à $\oplus \mathcal{O}_X$.

Le long de Z, on utilise le fait que

$$\mathcal{I}^l / \mathcal{I}^{l+1} \cong Sym^l(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \cong W \otimes_k \mathcal{O}_Z$$

pour conclure. ∎

Notons qu'on peut aussi voir l'éclaté comme le graphe de l'application rationnelle

$$U \mapsto \mathbb{P}^{r-1}$$

donnée par les g_i (cette application est indéfinie là où les g_i s'annulent, c'est-à-dire le long de Z).

D'après le lemme 7.26, on voit que dans ce cas, le diviseur exceptionnel n'est autre que le fibré projectif $\mathbb{P}(N_{Z/X})$.

Cas lisse. Considérons finalement le cas où $Z \subset X$ et X sont lisses sur k. On a alors

Lemme 7.29 *L'éclaté de X le long de Z, c'est-à-dire le long du faisceau d'idéaux de Z, est lisse.*

Démonstration. On utilise le fait que $Z \subset X$ est localement intersection complète de codimension e, et que les équations locales $g_1, \ldots, g_e$ définissant Z sont de différentielles indépendantes le long de Z. Le lemme précédent donne alors $e-1$ équations locales pour $\pi^{-1} \subset \widetilde{X}_{\mathcal{I}}$ dans $U \times \mathbb{P}^{e-1}$, à savoir, en un point x où $X_l \neq 0$,

$$g_j = \frac{X_j}{X_l} g_l.$$

On vérifie que ces équations sont à différentielles indépendantes et on applique le critère jacobien (lemme 7.21). ∎

8 Cohomologie de de Rham algébrique

8.1 Complexe de de Rham

Soit X un k-schéma de type fini. On a le faisceau $\Omega_{X/k}$ défini précédemment, de germe $\Omega_{\mathcal{O}_{X_\mu}/k}$ au point μ. Ce faisceau est cohérent et l'espace de ses sections globales sur un ouvert affine $U = Spec\, A$ est le A-module $\Omega_{A/k}$. On a la flèche naturelle

$$d : A \to \Omega_{A/k},$$

qui satisfait la règle de Leibniz, et par compatibilité avec les localisations, on en déduit un morphisme de faisceaux

$$d : \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/k}$$

qui *n'est pas* un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules, mais satisfait la règle de Leibniz par rapport à la structure de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules :

$$d(fg) = fdg + gdf,$$

pour f et g deux fonctions localement définies sur X. Notons que cette application d (qu'on appelle la différentielle) est cependant k-linéaire, c'est-à-dire est un morphisme de faisceaux de k-espaces vectoriels.

Différentielle extérieure. On va supposer maintenant que X est lisse, de sorte que $\Omega_{X/k}$ est localement libre. On dispose des puissances extérieures

$$\Omega^i_{X/k} := \bigwedge^i \Omega_{X/k},$$

(cf exercice 2.11). On va maintenant construire

$$d : \Omega^i_{X/k} \to \Omega^{i+1}_{X/k},$$

par la formule suivante :

$$d(fdf_1 \wedge \ldots \wedge df_i) = df \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_i. \tag{53}$$

Théorème 8.1 *i) La différentielle extérieure est bien définie.*
ii) Elle satisfait la règle de Leibniz

$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + fd\alpha$$

pour $f \in \mathcal{O}_X$.
iii) De plus on a $d \circ d = 0$.

Démonstration. On sait que $\Omega_{X/k}$ est localement libre. La formule (53) définit bien d dans une base locale $dg_1, \ldots, dg_n$, $n = dim\, X$, de $\Omega_{X/k}$ comme faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules, où les $g_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ sont des paramètres locaux au voisinage de $x \in X$.

Pour voir que cela fournit bien une définition cohérente, il faut voir que la définition est indépendante du choix de la base. Faisons la démonstration pour $i = 1$.

Soit $x \in X$ et soit $dg'_1, \ldots, dg'_n$ une nouvelle base de $\Omega_{X/k}$ au voisinage de x, où les g'_i sont des paramètres locaux au voisinage de x : alors on a

$$dg_i = \sum_j a_{ij} dg'_j$$

et pour montrer la cohérence, on doit prouver que

$$d(fdg_i) = df \wedge dg_i = df \wedge \sum_j a_{ij} dg'_j$$

$$= d(\sum_j f a_{ij} dg'_j) = \sum_j d(f a_{ij}) \wedge dg'_j.$$

Or par la règle de Leibniz, on a

$$d(fa_{ij}) = a_{ij} df + f da_{ij}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\sum_j da_{ij} \wedge dg'_j = 0.$$

Cela résulte du fait que la matrice de fonctions a_{ij} est donnée par

$$a_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial g'_j},$$

où les dérivées partielles $\frac{\partial \phi}{\partial g'_j}$ d'une fonction $\phi \in \mathcal{O}_X$ sont définies par la relation

$$d\phi = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial g_i} dg'_i.$$

Il en résulte que

$$da_{ij} = \sum_k \frac{\partial^2 g_i}{\partial g'_k \partial g'_j} dg'_k,$$

où $\frac{\partial^2 g_i}{\partial g'_k \partial g'_j}$ est symétrique en j et k (lemme de Schwarz), comme on le voit en passant aux complétés formels en x.

Le point ii) est une conséquence immédiate de la règle de Leibniz (cf 2 de la définition 7.1) pour les fonctions.

Pour le point iii), il suffit d'après la définition de montrer que $d(df) = 0$. Ecrivons dans une base locale dg_i de Ω_X au voisinage de $x \in X$ fournie par un système de paramètres locaux $g_i \in \mathcal{O}_{X,x}$,

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial g_i} dg_i.$$

On a alors par définition de d et des dérivées partielles :

$$d(df) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial g_i \partial g_j} dg_i \wedge dg_j.$$

L'équation $d(df) = 0$ résulte donc de la symétrie des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial g_i \partial g_j}$, ce qui a déjà été noté et se montre dans le cas des anneaux de séries formelles. ∎

Définition 8.2 Le complexe de de Rham (algébrique) $\Omega^{\cdot}_{X/k}$ de X est le complexe

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_{X/k} \xrightarrow{d} \Omega^2_{X/k} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^n_{X/k} \to 0,$$

où $n = dim\, X$ et le terme $\mathcal{O}_X$ (qu'on peut voir comme Ω^0_X) est mis en degré 0.

C'est bien un complexe par le iii) du théorème 8.1. Les termes sont des faisceaux cohérents localement libres sur X mais la différentielle n'est pas $\mathcal{O}_X$-linéaire. Les différentielles sont k-linéaires et donc les faisceaux de cohomologie de ce complexe sont des faisceaux de k-espaces vectoriels, et son hypercohomologie a naturellement une structure de k-espace vectoriel.

Définition 8.3 La cohomologie de de Rham (algébrique) de X est définie par

$$H^l_{dR}(X/k) := \mathbb{H}^l(X, \Omega^{\cdot}_{X/k}).$$

On rappelle que l'hypercohomologie d'un complexe borné à gauche de faisceaux $\mathcal{F}^{\cdot}$ sur X est définie en considérant des résolutions injectives

$$\mathcal{F}^{\cdot} \to \mathcal{I}^{i,\cdot},\ D^{i,j} : \mathcal{I}^{i,j} \to \mathcal{I}^{i,j+1}$$

de chaque faisceau $\mathcal{F}^i$, compatibles au sens où on a des différentielles

$$d^{i,j} : \mathcal{I}^{i,j} \to \mathcal{I}^{i+1,j}$$

telles que pour j fixé, chaque $(\mathcal{I}^{\cdot,j}, d^{\cdot,j})$ est un complexe, et que l'on ait

$$d^{i,j+1} \circ D^{i,j} = D^{i+1,j} \circ d^{i,j} : \mathcal{I}^{i,j} \to \mathcal{I}^{i+1,j+1}. \tag{54}$$

De telles résolutions sont construites dans [12], 8.1.

On considère alors le complexe total $(\mathcal{I}^{\cdot}, D)$ associé aux complexe double

$$\mathcal{I}^{i,j},\ D_1 = D^{i,j},\ D_2 = (-1)^i d^{i,j}$$

et on définit

$$\mathbb{H}^p(X, \mathcal{F}^{\cdot})$$

comme la cohomologie du complexe $\Gamma(X, \mathcal{I}^{\cdot})$.

Une propriété cruciale de l'hypercohomologie est le résultat suivant :

Théorème 8.4 *Soit $\phi : \mathcal{F}^{\cdot} \to \mathcal{G}^{\cdot}$ un morphisme de complexes de faisceaux de k-espace vectoriels sur X. Alors ϕ induit pour tout p un morphisme en hypercohomologie*

$$H^p(\phi) : \mathbb{H}^p(X, \mathcal{F}^{\cdot}) \to \mathbb{H}^p(X, \mathcal{G}^{\cdot}),$$

et si ϕ est un quasi-isomorphisme, $H^p(\phi)$ est un isomorphisme pour tout p.

On rappelle qu'un morphisme de complexes (de faisceaux) est un quasi-isomorphisme s'il induit un isomorphisme sur la (les faisceaux de) cohomologie.

Dans la pratique, on peut remplacer les résolutions injectives par des résolutions acycliques (cf [12], Proposition 8.12).

En particulier, comme nos faisceaux $\Omega^i_{X/k}$ sont des faisceaux cohérents, on sait qu'ils sont acycliques sur des ouverts affines par le théorème 2.29, et donc on peut remplacer les résolutions injectives $\Omega^i_{X/k} \to \mathcal{I}^\cdot$ par la résolution de Čech relative à un recouvrement affine de X.

Comme ces résolutions sont fonctorielles, elles commutent aux différentielles de de Rham, et on obtient automatiquement la condition (54).

On calculera donc

$$H^k_{dR}(X/k) = \mathbb{H}^k(X, \Omega^\cdot_{X/k})$$

comme la cohomologie du complexe simple associé au complexe double

$$\check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q_{X/k}),\ D_1 = d,\ D_2 = (-1)^q \delta. \tag{55}$$

8.1.1 Produit

Le complexe de de Rham algébrique $\Omega^\cdot_{X/k}$ est muni d'une structure de produit k-bilinéaire compatible avec les différentielles, c'est-à-dire d'un morphisme naturel de complexes

$$\Omega^\cdot_{X/k} \otimes_k \Omega^\cdot_{X/k} \to \Omega^\cdot_{X/k}.$$

Ce morphisme est donné par le produit extérieur. C'est un morphisme de complexes grâce à la règle de Leibniz

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{deg\,\alpha} \alpha \wedge d\beta.$$

On en déduit un produit $\cup$:

$$H^r_{dR}(X/k) \otimes H^s_{dR}(X/k) \to H^{r+s}_{dR}(X/k).$$

Ce produit est commutatif au sens gradué, c'est-à-dire satisfait

$$\alpha \cup \beta = (-1)^{deg\,\alpha deg\,\beta} \beta \cup \alpha,$$

comme le produit extérieur.

8.1.2 Invariance par homotopie

On va supposer ici k de caractéristique 0.

Théorème 8.5 *Soit X une variété lisse définie sur k. Alors*

$$H_{dR}(X \times_k A^1_k/k) \cong H_{dR}(X/k),$$

où l'isomorphisme est donné par le pull-back des formes différentielles :

$$pr_1^* : pr_1^{-1}\Omega^\cdot_{X/k} \to \Omega^\cdot_{X \times_k A^1_k/k}.$$

En particulier, pour $\alpha \in H_{dR}(X \times_k A^1_k/k)$, les restrictions de α à $X \times_k t \cong X$, pour $t \in k = A^1_k(k)$, ne dépendent pas de $t \in k$.

Démonstration. Soit $p := pr_1 : X \times_k A^1_k \to X$. Il suffit de montrer que le morphisme naturel

$$p^* : \Omega^\cdot_{X/k} \to p_*\Omega^\cdot_{X \times_k A^1_k/k}$$

est un quasi-isomorphisme.

En effet, comme l'application p est affine, on peut calculer $\mathbb{H}^p(X\times_k A_k^1, \Omega^{\cdot}_{X\times_k A_k^1/k})$ comme la cohomologie du complexe simple associé au complexe double de Rham-Čech de $\Omega^{\cdot}_{X\times_k A_k^1/k}$ associé au recouvrement affine $p^{-1}(\mathcal{U})$ de $X \times_k A_k^1$, où $\mathcal{U}$ est un recouvrement affine de X.

Or ce complexe simple n'est rien d'autre que le complexe simple associé au complexe double de Rham-Čech de $p_*\Omega^{\cdot}_{X\times_k A_k^1/k}$ associé au recouvrement affine $\mathcal{U}$ de X, et donc c'est aussi l'hypercohomologie du complexe $p_*\Omega^{\cdot}_{X\times_k A_k^1/k}$ sur X. Si on a montré que ce complexe est quasi-isomorphe via p^* à $\Omega^{\cdot}_{X/k}$, on applique le théorème 8.4 qui montre que p^* induit un isomorphisme en hypercohomologie.

Il reste donc à montrer que l'inclusion naturelle de complexes

$$p^* : (\Omega^{\cdot}_{X/k}, d) \to (R^0 p_* \Omega^{\cdot}_{X\times_k A_k^1/k}, d) \tag{56}$$

est un quasi-isomorphisme.

Soit $\alpha \in R^0 p_* \Omega^l_{X\times_k A_k^1/k}$. Alors α s'écrit

$$\alpha = \alpha' + dt \wedge \beta,$$

où α' et β sont des sections de $R^0 p_* p^* \Omega^l_{X/k}$, $R^0 p_* p^* \Omega^{l-1}_{X/k}$ respectivement. β s'écrit localement

$$\beta = \sum_{i\leq m} t^i \beta_i,$$

où les β_i sont des sections de $\Omega^{l-1}_{X/k}$. Comme $car.\, k = 0$, on a $t^i = \frac{1}{i+1}\frac{d}{dt}(t^{i+1})$, et donc

$$t^i dt \wedge \beta_i = d(\frac{1}{i+1} t^{i+1}\beta_i) - \frac{1}{i+1} t^{i+1} d\beta_i.$$

Il en résulte que toute forme $\alpha \in R^0 p_* \Omega^l_{X\times_k A_k^1/k}$ est, modulo une forme exacte, dans $R^0 p_*(p^* \Omega^l_{X/k})$. Soit maintenant

$$\alpha = \sum_i t^i \alpha_i \in R^0 p_*(p^* \Omega^l_{X/k}),$$

telle que $d\alpha = 0$. Alors on a

$$\sum_i t^i d\alpha_i + \sum_i i t^{i-1} dt \wedge \alpha_i = 0.$$

Comme k est de caractéristique nulle, ceci entraîne $\alpha_i = 0$ pour $i > 0$, de sorte que α est dans $\Omega^l_{X/k} \subset R^0 p_* p^* \Omega^l_{X/k}$.

Ceci prouve la surjectivité de (56) en cohomologie. L'injectivité se montre de même : Si $\alpha \in \Omega^l_{X/k}$, $\alpha = d\beta$, $\beta \in R^0 p_* \Omega^{l-1}_{X\times_k A_k^1/k}$, on a vu qu'on peut supposer que β ne comporte pas de dt, c'est-à-dire est dans $R^0 p_* p^* \Omega^{l-1}_{X/k}$. Alors $\beta = \sum_{i\leq m} t^i \beta_i$ comme ci-dessus et $d\beta = \alpha$ entraîne que $\beta_i = 0$ pour $i > 0$. Donc $\beta \in \Omega^{l-1}_{X/k}$.

■

8.1.3 Suite spectrale de Frölicher

Rappelons d'abord la notion de suite spectrale : on considère un complexe filtré $(K^\cdot, d, F^\cdot)$ dans une catégorie abélienne, c'est-à-dire que chaque objet K^i admet une filtration décroissante $F^j K^i$, avec $F^j K^i = K^i$, $j << 0$, et qu'on a

$$d(F^i K^j) \subset F^i K^{j+1}.$$

On construit alors une suite spectrale

$$E_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(K^\cdot),$$

où chaque $E^{p,q}$ est muni d'une différentielle $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ satisfaisant la propriété que

$$E_{r+1}^{p,q} = Ker\, d_r / Im\, d_r.$$

De plus, faisant l'hypothèse que pour i fixé, la filtration $F^j K^\cdot$ est finie, c'est-à-dire satisfait $F^N K^i = 0$ pour N suffisamment grand, on a

$$E_r^{p,q} = Gr_F^p H^{p+q}(K^\cdot)$$

pour $p+q$ fixé et r suffisamment grand (dépendant de $p+q$), où la filtration induite F sur $H^l(K^\cdot)$ est donnée par

$$F^j H^l(K^\cdot) = \frac{Ker\,(F^j K^l \xrightarrow{d} K^{l+1})}{d(K^{l-1}) \cap F^j K^l} = Im\,(H^l(F^j K^\cdot) \to H^l(K^\cdot)). \tag{57}$$

Chaque terme $E_r^{p,q}$ est défini comme

$$E_r^{p,q} = Z_r^{p,q} / B_r^{p,q},$$

où

$$Z_r^{p,q} = \{\alpha \in F^p K^{p+q},\, d\alpha \in F^{p+r} K^{p+q+1}\},$$
$$B_r^{p,q} = F^{p+1} K^{p+q} \cap Z_r^{p,q} + d(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}).$$

La différentielle $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ est induite par $d : Z_r^{p,q} \to F^{p+r} K^{p+q+1}$.

On s'intéressera au cas de l'hypercohomologie d'un complexe de faisceaux borné à gauche $\mathcal{F}^\cdot$ sur un espace topologique X (supposons pour simplifier $\mathcal{F}^j = 0$, $j < 0$). Le complexe admet la filtration dite naïve, qui consiste à poser

$$F^i \mathcal{F}^j = 0,\ j < i,\ F^i \mathcal{F}^j = \mathcal{F}^j,\ j \geq i,$$

ce qu'on note

$$F^i(\mathcal{F}^\cdot) = \mathcal{F}^{\cdot \geq i}.$$

On a, sous notre hypothèse que le complexe est supporté en degré positif,

$$F^0 \mathcal{F}^\cdot = \mathcal{F}^\cdot.$$

De plus on a bien $F^i \mathcal{F}^j = 0$ pour i suffisamment grand.

Pour construire une suite spectrale convergeant vers l'hypercohomologie de ce complexe de faisceaux et associée à la filtration F, on considère une résolution injective bornée à gauche $\mathcal{I}^{\cdot,\bullet}$ du complexe $\mathcal{F}^\cdot$; sous notre hypothèse, on peut supposer par exemple $\mathcal{I}^{i,\bullet} = 0$ pour $i < 0$.

Comme on l'a vu plus haut, l'hypercohomologie

$$\mathbb{H}^l(X, \mathcal{F}^\cdot)$$

est définie comme la cohomologie du complexe

$$\Gamma(X, \mathcal{S}^\cdot)$$

où $\mathcal{S}^\cdot$ est le complexe simple associé au complexe double

$$\mathcal{I}^{\cdot,\bullet}, d = d_1 + (-1)^\cdot d_2.$$

Or ce complexe est filtré par les

$$F^i\Gamma(X, \mathcal{S}^\cdot) = \Gamma(X, F^i\mathcal{S}^\cdot),$$

où chaque $F^i\mathcal{S}^\cdot$ est le complexe simple associé au complexe double

$$F^i\mathcal{I}^{\cdot,\bullet} = 0,\ i > \cdot,\ F^i\mathcal{I}^{\cdot,\bullet} = \mathcal{I}^{\cdot,\bullet},\ \cdot \geq i,$$

ou encore,

$$F^i\mathcal{I}^{\cdot,\bullet} = \mathcal{I}^{\geq i,\bullet}.$$

La suite spectrale induite converge vers l'hypercohomologie de $\mathcal{F}^\cdot$, et on a

$$E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q} = Gr_F^p\mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{F}^\cdot),$$

pour r suffisamment grand ($r > q + 1$ suffit), où la filtration F est induite par la filtration naïve sur $\mathcal{F}^\cdot$ par la formule (57).

Comme d'habitude, on peut remplacer ici les filtrations injectives par les filtrations acycliques, par exemple de type Čech relativement à un recouvrement ouvert affine, dans le cas où le complexe est un complexe de faisceaux quasi-cohérents sur un k-schéma quasi-projectif.

Considérons le cas où X est une variété projective lisse définie sur k, et $\mathcal{F}^\cdot$ est le complexe de de Rham $\Omega^\cdot_{X/k}$. La filtration naïve induit sur la cohomologie de de Rham de X la *filtration de Hodge*. La suite spectrale associée décrite ci-dessus est appelée *suite spectrale de Frölicher* ou *suite spectrale de Hodge vers de Rham*.

Cette suite spectrale nous dit tout d'abord que $H^l_{dR}(X/k)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie. En effet, on a tout d'abord d'après la définition ci-dessus des $E_r^{p,q}$, pour un recouvrement $\mathcal{U}$ de X par des ouverts affines,

$$E_0^{p,q} = \check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U}, \Omega^p_X),\ d_0 = \delta,$$

et donc

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_{X/k}).$$

D'après le théorème 2.46, $E_1^{p,q}$ est un k-espace vectoriel de dimension finie. Comme les différentielles

$$d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$$

sont k-linéaires, et

$$E_{r+1}^{p,q} = \frac{Ker\,(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1})}{d_r(E_r^{p-r,q+r-1})},$$

on trouve que tous les $E_r^{p,q}$ sont de dimension finie sur k, et comme $H^{p+q}_{dR}(X/k)$ admet la filtration de Hodge avec gradué associé

$$E_r^{p,q},\ p \geq 0,\ q \geq 0,\ p + q = k$$

dès que $r \geq p + q + 1$, on conclut qu'il est également de dimension finie sur k.

8.2 Version holomorphe et théorème de comparaison

Soit X une variété complexe compacte. Le fibré cotangent holomorphe Ω_X est le fibré vectoriel holomorphe de rang $n = dim\, X$, obtenu en recollant les fibrés triviaux engendrés par dz_i, $1 \leq i \leq n$ dans des cartes holomorphes via les transposées des matrices jacobiennes des morphismes de changement de cartes. On note de la même façon le faisceau des sections holomorphes de Ω_X. Ω_X est donc un faisceau localement libre de $\mathcal{O}_X$-modules.

Lemme 8.6 *Si $X = Y^{an}$ pour une variété algébrique lisse complexe Y, on a*

$$\Omega_X = \Omega^{an}_{Y/\mathbb{C}}.$$

Démonstration. Le faisceau $\Omega_{Y/\mathbb{C}}$ est localement engendré sur $\mathcal{O}_Y$ par les symboles df où f est une fonction rationnelle définie sur l'ouvert considéré. Les relations sont données par la règle de Leibniz et le fait que d doit être $\mathbb{C}$-linéaire.

Il en résulte que $\Omega^{an}_{Y/\mathbb{C}}$ est engendré sur $\mathcal{O}_{Y^{an}} = \mathcal{O}_X$ par les df, avec les relations données par la règle de Leibniz pour les fonctions holomorphes et le fait que d doit être $\mathbb{C}$-linéaire. Il suffit de vérifier qu'on a la même présentation pour Ω_X, ce qui est bien connu : (penser à Ω_X comme au dual de T_X, le fibré des dérivations, cf [12], 2.1.2). ∎

En particulier, si Y est projective, on a d'après le théorème 6.22, des isomorphismes canoniques, pour tous p, q :

$$H^q(Y, \Omega^p_{Y/\mathbb{C}}) \cong H^q(X, \Omega^p_X).$$

Corollaire 8.7 *Y étant une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$, et $X = Y^{an}$ étant son "analytisée", on a des isomorphismes canoniques :*

$$H^i_{dR}(Y/\mathbb{C}) = \mathbb{H}^i(Y, \Omega^\cdot_{Y/\mathbb{C}}) \cong \mathbb{H}^i(X, \Omega^\cdot_X).$$

Démonstration. On a une flèche naturelle ϕ^* de $\mathbb{H}^i(Y, \Omega^\cdot_{Y/\mathbb{C}})$ vers $\mathbb{H}^i(X, \Omega^\cdot_X)$, donnée par le morphisme d'espaces annelés $\phi : X \to Y$ qui d'après le lemme 8.6 est tel que $\phi^*\Omega^\cdot_{Y/\mathbb{C}} = \Omega^\cdot_X$.

En fait on a tout un morphisme de suites spectrales

$$E^{p,q}_r(Y) \to E^{p,q}_r(X),$$

où les deux suites spectrales sont les suites spectrales de Frölicher, associées à la filtration naïve sur les complexes $\Omega^\cdot_{Y/\mathbb{C}}$ et $\Omega^\cdot_X$. En effet, ϕ^* est compatible à ces filtrations.

Comme on l'a déjà vu, les termes $E^{p,q}_1$ sont égaux respectivement à $H^q(Y, \Omega^p_{Y/\mathbb{C}})$ et à $H^q(X, \Omega^p_X)$. Le théorème de Serre montre donc que les suites spectrales sont isomorphes via ϕ^* en E_1, et il en va donc de même pour tout E_r, et en particulier pour E_∞. Dès lors, le morphisme filtré $\phi^* : \mathbb{H}^i(Y, \Omega^\cdot_{Y/\mathbb{C}}) \to \mathbb{H}^i(X, \Omega^\cdot_X)$ induit un isomorphisme sur les gradués pour la filtration naïve, c'est-à-dire les $E^{p,q}_\infty$, $p + q = i$, et donc est un isomorphisme. ∎

Revenons maintenant vers la cohomologie $\mathbb{H}^i(X, \Omega^{\cdot}_X)$. On a :

Théorème 8.8 *Le complexe de de Rham holomorphe*

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X \ldots \xrightarrow{d} \Omega^n_X \to 0$$

est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}$ *sur* X*.*

Démonstration. Une fonction holomorphe est localement constante si et seulement si sa différentielle est nulle. Par ailleurs, il faut avoir le lemme de Poincaré holomorphe qui dit qu'une forme holomorphe α de degré $q > 0$ est localement exacte si et seulement si elle est fermée. La preuve est identique à celle du lemme de Poincaré différentiable. On écrit dans des coordonnées holomorphes locales $z_1, \ldots, z_n$

$$\alpha = \sum_I \alpha_I dz_I,$$

où les fonctions α_I sont holomorphes. On utilise alors le fait qu'une fonction holomorphe $f(z_1, \ldots, z_k)$ s'écrit localement $\frac{\partial g}{\partial z_k}$ où g est aussi holomorphe.

On utilise ce fait comme dans la preuve du théorème 4.12 pour montrer le résultat par récurrence sur le plus grand indice k apparaissant effectivement dans l'écriture de α. Pour $k = q$, on a $\alpha = f dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_q$ et $d\alpha = 0$ équivaut au fait que f ne dépend pas des variables z_i, $i > q$. Alors si $f = \frac{\partial g}{\partial z_1}$, on a

$$\alpha = d(g dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_q).$$

En général, si $k > q$, on écrit

$$\alpha = \alpha' + dz_k \wedge \beta,$$

avec α', β telles que seuls les indices $< k$ apparaissent effectivement dans leur écriture. Soit $\beta = \sum_I \beta_I dz_I$, où seuls les $I \subset \{1, \ldots, k-1\}$ apparaissent. La condition $d\alpha = 0$ entraîne que les β_I ne dépendent pas des variables z_i, $i > k$. Écrivons $\beta_i = \frac{\partial g_I}{\partial z_k}$, où les g_I ne dépendent pas de z_i, $i > k$. Alors

$$dz_k \wedge \beta - d(\sum_I g_I dz_I)$$

ne contient pas de dz_i pour $i \geq k$, et donc $\alpha - d(\sum_I g_I dz_I)$ ne contient pas de dz_i pour $i \geq k$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à $\alpha - d(\sum_I g_I dz_I)$. ■

Corollaire 8.9 *Si* X *est une variété complexe, on a*

$$H^i(X, \mathbb{C}) = \mathbb{H}^i(X, \Omega^{\cdot}_X).$$

En effet, dire que le complexe $\Omega^{\cdot}_X$ est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}$ équivaut à dire qu'il est quasi-isomorphe au faisceau $\mathbb{C}$ placé en degré 0. On applique alors le théorème 8.4. ■

En combinant ce corollaire avec le principe GAGA, on arrive ici à une conclusion remarquable, due à Grothendieck : supposons que la variété complexe X est l'analytisée d'une variété projective Y définie sur $\mathbb{C}$, $X = Y^{an}$. Les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $H^i(X, \mathbb{C})$ sont des invariants topologiques (relatifs à la topologie usuelle) de X, et ne dépendent aucunement de la structure complexe. Les théorèmes ci-dessus, qui fournissent les identifications

$$H^i(X, \mathbb{C}) \cong \mathbb{H}^i(X, \Omega^{\cdot}_X) \cong \mathbb{H}^i(Y, \Omega^{\cdot}_{Y/\mathbb{C}})$$

montrent que ces invariants topologiques se calculent de façon purement algébrique en considérant la variété Y qui est une variété algébrique abstraite définie sur $\mathbb{C}$.

Une conséquence remarquable de ce fait est la suivante : supposons que Y soit définie sur un sous-corps $k \subset \mathbb{C}$, ce qui signifie que pour un plongement adéquat de Y dans l'espace projectif, on peut choisir des générateurs pour l'idéal homogènes de Y qui sont des polynômes à coefficients dans k. (Notons que toute variété complexe est toujours définie sur un corps k assez petit, à savoir le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par les coefficients de polynômes $P_1, \ldots, P_N$ engendrant l'idéal homogène de Y : un tel corps est petit puisqu'il est de degré de transcendance fini sur $\mathbb{Q}$.) On peut voir cette hypothèse en disant qu'il existe Y_k, une variété algébrique définie sur k, telle que Y est obtenue par extension des scalaires de k à $\mathbb{C}$. Le corollaire 2.34, (ou plus précisément sa version en hypercohomologie, qui s'en déduit immédiatement comme ci-dessus par un argument de suite spectrale) montre alors que

$$\mathbb{H}^i(Y, \Omega^{\cdot}_{Y/\mathbb{C}}) \cong \mathbb{H}^i(Y_k, \Omega^{\cdot}_{Y_k/k}) \otimes_k \mathbb{C}.$$

Ainsi, les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathbb{C})$ sont munis d'une k-structure dès que X est l'analytisée d'une variété algébrique Y définie sur un sous-corps k de $\mathbb{C}$.

Supposons que $k = \mathbb{Q}$. La cohomologie de Betti $H^l(X, \mathbb{C})$ est alors munie de deux structures rationnelles : l'une est celle décrite ci-dessus, et provient de l'isomorphisme

$$H^l(X, \mathbb{C}) = H^l_{dR}(Y_{\mathbb{C}/\mathbb{C}}) = H^l_{dR}(Y_{\mathbb{Q}/\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C}.$$

L'autre vient du théorème de changement de coefficients pour la cohomologie de Betti de X :

$$H^l(X, \mathbb{C}) = H^l(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}.$$

Ces deux $\mathbb{Q}$-structures n'ont rien à voir. Leur comparaison donne lieu à la notion de périodes arithmétiques [1].

8.2.1 Dégénérescence en E_1

La théorie de Hodge (cf section 5) montre que la suite spectrale de Frölicher d'une variété compacte kählérienne dégénère en E_1. En effet, la décomposition de Hodge (théorème 5.28), où les $H^{p,q}$ sont identifiés à $H^q(X, \Omega^p_X)$, montre qu'on a

$$b_i(X) := dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathbb{C}) = \sum_{p+q=i} h^{p,q}(X),$$

avec $h^{p,q}(X) := dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \Omega^p_X)$. Donc on a $h^{p,q} = dim_{\mathbb{C}} E^{p,q}_1$.

Par ailleurs, on a aussi

$$b_i(X) = \sum_{p+q=i} dim_{\mathbb{C}} E_\infty^{p,q},$$

où $E_\infty^{p,q} := E_r^{p,q}$ pour r suffisamment grand dépendant de p et q, puisque $E_\infty^{p,q}$ est le p-ième gradué de $H^i(X,\mathbb{C})$, $i = p+q$ pour la filtration de Hodge.

On a vu que chaque $E_{r+1}^{p,q}$ se déduit des $E_r^{p',q'}$ par la formule

$$E_{r+1}^{p,q} = \frac{Ker\,(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1})}{d_r(E_r^{p-r,q+r-1})}.$$

On a donc $dim_{\mathbb{C}} E_{r+1}^{p,q} \leq dim_{\mathbb{C}} E_r^{p,q}$, et l'égalité pour tous p, q équivaut à l'annulation des différentielles d_r. L'égalité

$$\sum_{p+q=i} dim_{\mathbb{C}} E_1^{p,q} = \sum_{p+q=i} dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \Omega_X^p) = dim_{\mathbb{C}} H^i(X,\mathbb{C}) = \sum_{p+q=i} dim_{\mathbb{C}} E_\infty^{p,q},$$

avec $dim_{\mathbb{C}} E_\infty^{p,q} \leq dim_{\mathbb{C}} E_1^{p,q}$ entraîne donc

$$dim_{\mathbb{C}} E_\infty^{p,q} = dim_{\mathbb{C}} E_1^{p,q},\ \forall\, p,\, q$$

ce qui implique $dim_{\mathbb{C}} E_{r+1}^{p,q} = dim_{\mathbb{C}} E_r^{p,q}$ pour tous $r \geq 1$, p, $q \geq 0$, et donc que $d_r = 0$, $r \geq 1$.

Vu l'égalité notée plus haut (et conséquence du principe GAGA) des suites spectrales de Frölicher algébrique et analytique à partir de E_1, on en déduit que la suite spectrale du complexe de de Rham algébrique d'une variété projective lisse définie sur $\mathbb{C}$ dégénère en E_1.

Ce résultat est en fait valable pour une variété définie sur un corps de caractéristique 0 par le corollaire 2.34.

Deligne et Illusie [4] ont une preuve algébrique de cette dégénérescence en E_1, qui recourt à la réduction à la caractéristique p.

8.3 Théorèmes d'annulation et théorème de Lefschetz

Comme observé par Kodaira et Spencer, les théorèmes d'annulation 5.32 permettent de donner une démonstration algébrique du théorème de restriction hyperplane de Lefschetz :

Théorème 8.10 *Soit $X \subset \mathbb{P}_k^N$ une variété projective lisse de dimension n définie sur un corps k de caractéristique zéro, et soit $Y = \mathbb{P}^{N-1} \cap X$ une section hyperplane lisse. Alors le morphisme de restriction*

$$j^* : H_{dR}^l(X/k) \to H_{dR}^l(Y/k)$$

est un isomorphisme pour $l < n-1$ et est injectif pour $k = n-1$.

On va procéder d'abord à diverses réductions. On montre d'abord :

Lemme 8.11 *Le théorème 8.10 est une conséquence du théorème 8.12 suivant.*

Théorème 8.12 *Soit $X \subset \mathbb{P}^N_k$ une variété projective lisse de dimension n définie sur un corps k de caractéristique zéro, et soit $Y = \mathbb{P}^{N-1} \cap X$ une section hyperplane lisse. Alors le morphisme de restriction*

$$j^* : H^q(X, \Omega^p_{X/k}) \to H^q(Y, \Omega^p_{Y/k})$$

est un isomorphisme pour $p + q < n - 1$ et est injectif pour $p + q = n - 1$.

Démonstration du lemme 8.11. C'est un argument de suite spectrale. On a déjà vu que les cohomologies de de Rham de X et de Y sont les aboutissements de suites spectrales de Frölicher associées à la filtration naïve du complexe de de Rham. Ces suites spectrales ont respectivement pour terme $E_1^{p,q}$

$$H^q(X, \Omega^p_{X/k}), \ \ H^q(Y, \Omega^p_{Y/k}).$$

Le morphisme j^* induit un morphisme de suites spectrales, et le théorème 8.12 dit que ce morphisme est un isomorphisme en E_1 ou est injectif dans les rangs concernés. Cela entraîne immédiatement que c'est un isomorphisme ou que c'est injectif en E_∞ dans les rangs considérés, du fait que chaque E_r est la cohomologie du complexe (E_{r-1}, d_{r-1}). Ceci montre que le morphisme de restriction

$$j^* : H^q_{dR}(X/k) \to H^q_{dR}(Y/k) \tag{58}$$

qui est un morphisme compatible aux filtrations de Hodge, induit un isomorphisme sur les gradués. Comme les filtrations sont bornées, cela entraîne que le morphisme de restriction (58) est un isomorphisme.

∎

Rappelons maintenant l'énoncé du théorème d'annulation d'Akizuki-Kodaira-Nakano. Soit X une variété complexe, et soit L un fibré en droites holomorphe sur X. Rappelons que L est dit positif si L peut être muni d'une métrique hermitienne dont la forme de Chern associée est positive (i.e. est une forme de Kähler). Par le théorème de plongement de Kodaira (cf section 6.1), ceci équivaut au fait que L est ample, c'est-à-dire que les sections holomorphes de $L^{\otimes N}$ pour N suffisamment grand, fournissent un plongement

$$\Phi_{NL} : X \to \mathbb{P}^r.$$

Théorème 8.13 *Soit L un fibré en droites positif sur X, où X est une variété complexe compacte. Alors pour $p + q < n := dim\, X$ on a*

$$H^q(X, \Omega^p_X(-L)) = 0.$$

Ici, la notation $\mathcal{F}(-L)$ signifie $\mathcal{F} \otimes L^{-1}$ pour $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X.

Remarque 8.14 On a montré dans la section 5.6 la version duale du théorème 8.13 (théorème 5.32). La théorie de Hodge fournit à l'aide de l'opérateur $*$ un isomorphisme

$$H^q(X, \Omega^p_X(-L)) \cong H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}_X(L))^*,$$

qu'on retrouvera plus loin algébriquement sous le nom de dualité de serre.

Corollaire 8.15 *Soit k de caractéristique 0 et X une variété projective lisse définie sur k, L un fibré ample sur X. Alors pour $p+q<n:=dim\,X$ on a*

$$H^q(X,\Omega_X^p(-L))=0.$$

Démonstration. On a déjà remarqué qu'une variété définie sur k (corps de caractéristique 0) est définie sur un sous-corps k' de k qui a un degré de transcendance fini sur $\mathbb{Q}$, et donc se plonge dans $\mathbb{C}$. De même pour le fibré en droites L. Si X et L sont définis sur k', c'est-à-dire proviennent par extension des scalaires de X' et L' définis sur k', alors on peut appliquer le corollaire 2.34 aux extensions $k'\subset k$ et $k'\subset\mathbb{C}$:

$$H^q(X,\Omega^p_{X/k}(-L))=H^q(X',\Omega^p_{X'/k'}(-L'))\otimes_{k'}k,$$

$$H^q(X_{\mathbb{C}},\Omega^p_{X_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}}(-L))\cong H^q(X',\Omega^p_{X'/k'}(-L'))\otimes_{k'}\mathbb{C}.$$

Or $H^q(X_{\mathbb{C}},\Omega^p_{X_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}}(-L))=0$ par le théorème de comparaison de Serre et le théorème 8.13. Il résulte des deux égalités que $H^q(X,\Omega^p_{X/k}(-L))=0$. ∎

Démonstration du théorème 8.12 Le morphisme de restriction

$$j_p^*:\Omega^p_{X/k}\to\Omega^p_{Y/k}$$

est la composition des morphismes naturels

$$\Omega_X^p\to\Omega_X^p\otimes\mathcal{O}_Y=\Omega^p_{X|Y}\tag{59}$$

$$\Omega^p_{X|Y}\to\Omega^p_Y\tag{60}$$

(les termes de droite sont des faisceaux sur Y, qu'on voit via j_*, qui induit un isomorphisme en cohomologie et que l'on omet généralement, comme des faisceaux sur X).

Il suffit donc de montrer que chacun des morphismes (59) et (60) induit un isomorphisme sur la cohomologie de degré q pour $p+q<n-1=dim\,Y$ et une injection pour $p+q=n-1$.

Pour cela, on applique le corollaire 8.15 à X et à Y. Considérons d'abord le cas de (59). On a la suite exacte :

$$0\to\Omega_X^p(-Y)\to\Omega_X^p\to\Omega^p_{X|Y}\to0.$$

La suite exacte longue associée et l'annulation $H^q(X,\Omega_X^p(-Y))=0$, $p+q<dim\,X$, entraînent immédiatement que la flèche induite par (59)

$$H^q(X,\Omega_X^p)\to H^q(Y,\Omega^p_{X|Y})$$

est un isomorphisme pour $p+q<dim\,Y=dim\,X-1$ et est injectif pour $p+q=dim\,Y$.

Considérons maintenant le cas de (60). On a la suite exacte conormale sur Y

$$0\to\mathcal{O}_Y(-L)\to\Omega_{X|Y}\to\Omega_Y\to0,$$

où on utilise l'identification

$$\mathcal{O}_Y(-L)=\mathcal{I}_Y\otimes\mathcal{O}_Y=\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2$$

et la proposition 7.20.

Une telle suite exacte fournit aussi en passant aux puissances extérieures p-ièmes :

$$0 \to \Omega_Y^{p-1}(-L) \to \Omega_{X|Y}^p \to \Omega_Y^p \to 0,$$

La suite exacte longue de cohomologie associée et le théorème 8.15 appliqué à Y montrent donc que le morphisme induit par (60)

$$H^q(Y, \Omega_{X|Y}^p) \to H^q(Y, \Omega_Y^p)$$

est un isomorphisme pour $p + q < dim Y$ et est injectif pour $p + q = dim Y$. ∎

Remarque 8.16 Il existe une version plus forte du théorème 8.10, mais qui nécessite $k = \mathbb{C}$ et des arguments topologiques. On peut alors supprimer l'hypothèse que X et Y soient lisses, pour ne garder que l'hypothèse que $X \setminus Y$ est lisse, et d'autre part remplacer la cohomologie de de Rham (c'est-à-dire de Betti à coefficients complexes, d'après Serre) par la cohomologie de Betti à coefficients entiers.

Cette version nécessite des arguments de topologie (cf [12], chap. 13).

9 Dualité de Serre

9.1 Fibré canonique

Supposons que X soit une variété lisse sur k de dimension n. Le fibré canonique K_X de X est alors défini comme le fibré en droites $\bigwedge^n \Omega_{X/k}$. On définira plus loin le faisceau dualisant, qui a pour certaines variétés la vertu d'être inversible, et généralise le fibré canonique à certaines variétés singulières (localement intersection complètes par exemple).

9.1.1 Suite exacte d'Euler

On va calculer ici $K_{\mathbb{P}_k^n}$.

Théorème 9.1 *Le fibré canonique de $\mathbb{P}_k^n$ est isomorphe non canoniquement à*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1).$$

Cet isomorphe devient canonique par choix d'un générateur de $\bigwedge^{n+1} H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$.

On doit tout d'abord introduire la *suite exacte d'Euler* qui décrit $\Omega_{\mathbb{P}_k^n/k}$.

Proposition 9.2 *On a une suite exacte naturelle*

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}_k^n/k}(1) \to H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{ev} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \to 0, \tag{61}$$

où la flèche de droites ev est donnée par l'évaluation des sections.

Démonstration. Soit $V := H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1))$ et définissons la dernière flèche comme la flèche d'évaluation des sections. Le fait que le noyau de cette flèche s'envoie naturellement dans $\Omega_{\mathbb{P}_k^n}(1)$ est dû à l'observation suivante : si on a une section σ d'un faisceau localement libre $\mathcal{E}$ sur une variété X, on ne peut pas définir sa différentielle en l'absence d'une connexion sur $\mathcal{E}$. Cependant, si σ s'annule au point x, la différentielle

$$d\sigma_{|x} \in \Omega_X \otimes \mathcal{E}_{|x}$$

est bien définie, en prenant une trivialisation locale de $\mathcal{E}$ au voisinage de x, et en différentiant les coordonnées de σ dans cette trivialisation. Cette différentielle en x ne dépend pas de la trivialisation grâce à la règle de Leibniz. En effet, un changement de trivialisation modifie les coordonnées $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ de σ par l'action d'une matrice de transition :

$$\sigma'_i = \sum_j M_{ij}\sigma_j,\ M_{ij} \in \mathcal{O}_{X,x}.$$

Différentiant, on obtient

$$d\sigma'_i = \sum_j M_{ij} d\sigma_j + \sum_j dM_{ij}\sigma_j.$$

Mais comme les σ_i s'annulent en x, on obtient :

$$(d\sigma'_i)_{|x} = \sum_j M_{ij}(d\sigma_j)_{|x} \text{ dans } k(x)^r \otimes \Omega_{X|x}.$$

Ceci montre bien que le r-uple $((d\sigma_i)_{|x})$ se transforme comme un élément de $\mathcal{E}\otimes\Omega_{X|x}$.

Ceci fournit un morphisme du noyau de la flèche d'évaluation ci-dessus dans $\Omega_{\mathbb{P}^n_k}(1)$. Il reste à montrer que ce morphisme est un isomorphisme. Soit $x \in U_i \cong A^n_k \subset \mathbb{P}^n_k$, où U_i est un ouvert standard, disons $i = 0$ et U_i est défini par $X_0 \neq 0$. $X_0, \ldots, X_n$ fournissent une base de V, et sur U_0, $\mathcal{O}(1)$ est trivialisé grâce à la section non nulle X_0. Le noyau de la flèche d'évaluation est alors engendré sur U_0 par les sections de $V \otimes \mathcal{O}_{U_0}$

$$z_i X_0 - X_i,$$

où $U_0 = A^n_k = \mathit{Spec}\, k[z_1, \ldots, z_n]$, $z_i = X_i/X_0$. Les différentielles de ces sections, dans la trivialisation donnée par X_0, sont données par les dz_i, qui forment bien une base de $\Omega_{A^n_k}/k$.

■

Démonstration du théorème 9.1. On prend la puissance extérieure maximale $n+1$ dans la suite exacte (61). Cela donne un isomorphisme canonique

$$\bigwedge^n (\Omega_{\mathbb{P}^n_k/k}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong \bigwedge^{n+1} H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}.$$

Le terme de gauche étant égal à $K_{\mathbb{P}^n_k}(n+1)$, le résultat est démontré. ■

Corollaire 9.3 *On a un isomorphisme canonique*

$$H^n(\mathbb{P}^n_k, K_{\mathbb{P}^n}) \cong k.$$

Démonstration. On sait que $K_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$, et d'autre part, le théorème 2.38 nous dit que $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) \cong k$. Il en résulte un isomorphisme $H^n(\mathbb{P}^n_k, K_{\mathbb{P}^n}) \cong k$, et il reste seulement à comprendre pourquoi cet isomorphisme est canonique.

L'isomorphisme $K_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$ ci-dessus est fourni par la suite exacte d'Euler, et une trivialisation de $\bigwedge^{n+1} H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1))$. Rappelons que la base $X_0, \ldots, X_n$ de $H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1))$ étant choisie, on a trouvé dans la preuve du théorème 2.38 un générateur

$$\frac{1}{X_0 \ldots X_n}$$

de $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1))$ calculé comme la cohomologie de Čech de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1))$ relativement au recouvrement de $\mathbb{P}^n_k$ par les ouverts standards. Par ailleurs, le choix de coordonnées homogènes $X_0, \ldots, X_n$ fournit un générateur $X_0 \wedge \ldots \wedge X_n$ de $\bigwedge^{n+1} H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$. Si on a un nouveau système de coordonnées $X'_0, \ldots, X'_n$, on a

$$X'_0 \wedge \ldots \wedge X'_n = det\, M \cdot X_0 \wedge \ldots \wedge X_n \text{ dans } \bigwedge^{n+1} H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)),$$

où M est la matrice exprimant les X'_i en fonction des X_i. L'isomorphisme

$$\alpha' : K_{\mathbb{P}^n_k} \cong \mathcal{O}(-n-1)$$

déduit de la base X'_i est donc égal à

$$det\, M^{-1} \cdot \alpha,$$

où α est l'isomorphisme $K_{\mathbb{P}^n_k} \cong \mathcal{O}(-n-1)$ déduit de la base X_i. Pour voir que l'isomorphisme $\beta' : H^n(\mathbb{P}^n_k, K_{\mathbb{P}^n}) \cong k$ contruit à l'aide de la base X'_i coïncide avec l'isomorphisme $\beta : H^n(\mathbb{P}^n_k, K_{\mathbb{P}^n}) \cong k$ contruit à l'aide de la base X_i, il suffit donc de voir que le générateur $u' := \frac{1}{X'_0 \ldots X'_n}$ de $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1))$ est égal à $det\, M^{-1} \cdot u$, où $u := \frac{1}{X_0 \ldots X_n}$ (les deux étant compris comme des cochaînes de Čech relativement aux recouvrements ouverts considérés).

Ceci est évident si la base X'_i se déduit de la base X_i par une transformation diagonale. C'est aussi évident si la transformation est donnée par une permutation. En général, on note qu'on a un caractère

$$\chi : Gl_{n+1}(k) \to k^*$$

qui à une matrice de transformation M dont les vecteurs colonnes sont les X'_i dans la base X_i associe l'élément α de k^* tel que

$$u' = \alpha u \text{ dans } H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-n-1)).$$

Un tel caractère est nécessairement une puissance du déterminant. Le cas diagonal montre que c'est nécessairement det^{-1}.

∎

Remarque 9.4 On a l'isomorphisme de dualité de Serre $H^n(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{P}^n}) = \mathbb{C}$ et par ailleurs

$$H^n(\mathbb{CP}^n, K^{an}_{\mathbb{P}^n}) = H^n(\mathbb{CP}^n, \Omega^n_{\mathbb{P}^n}) = H^{2n}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{C}) = \mathbb{C},$$

où l'égalité $H^n(\mathbb{CP}^n, \Omega^n_{\mathbb{P}^n}) = H^{2n}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{C})$ provient de l'examen de la suite spectrale de Frölicher de $\mathbb{CP}^n$, et $H^{2n}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ est donné par intégration sur $\mathbb{CP}^n$. Ces isomorphismes ne commutent qu'à un coefficient près avec l'isomorphisme de comparaison I^*. En fait si on compose l'intégration sur $\mathbb{CP}^n$ avec I^*, on peut montrer que le générateur de $H^n(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{P}^n}) = \mathbb{C}$ s'envoie sur $(2\iota\pi)^n$.

Si $X \subset \mathbb{P}^n_k$ est une sous-variété lisse, on a vu la formule d'adjonction (52), qui dit la chose suivante : $\mathcal{I}$ étant le faisceau d'idéaux de X dans Y, on a la suite exacte conormale (cf Proposition 7.20)

$$0 \to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega_{\mathbb{P}^n|X} \to \Omega_X \to 0,$$

où $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 =: N^*_{X/\mathbb{P}^n}$ est localement libre sur X, et on a :

$$K_X \cong K_{\mathbb{P}^n|X} \otimes det\, N_{X/\mathbb{P}^n}.$$

Cet isomorphisme est canonique. Ce calcul du fibré canonique permet d'étendre la définition du fibré canonique aux variétés localement intersections complètes. En effet, si $X \subset Y$ est localement intersection complète, on sait que le faisceau conormal de X dans Y est localement libre, et on définit

$$K_X = K_Y \otimes det\, N_{X/Y}. \tag{62}$$

Pour la cohérence de cette définition, il faut noter que si $X \subset Y$ est localement intersection complète dans une variété Y lisse, alors pour tout plongement $X \subset Y'$ dans une variété lisse, X est localement intersection complète dans Y'. De plus la définition de K_X par la formule (62) est indépendante du choix de Y (utiliser le plongement diagonal de X dans $Y \times Y'$).

9.2 $\mathcal{E}xt$ et Ext

La catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules sur un k-schéma X possède assez d'injectifs. Sur cette catégorie, étant donné un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-modules, on a deux foncteurs exacts à gauche définis par $\mathcal{F}$, l'un qu'on notera $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \cdot)$ à valeurs dans la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules :

$$\mathcal{G} \mapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}),$$

l'autre qu'on notera $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \cdot)$ à valeurs dans la catégorie des k-espaces vectoriels

$$\mathcal{G} \mapsto Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \Gamma(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Si $\mathcal{G}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules, on définira $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ comme la cohomologie en degré i du complexe $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}^{\cdot})$, où

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}^0 \to \dots$$

est une résolution injective de $\mathcal{G}$.

De même on définira $Ext^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ comme la cohomologie en degré i du complexe $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}^{\cdot})$, où

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}^0 \to \dots$$

est une résolution injective de $\mathcal{G}$.

L'indépendance du choix de la résolution est une généralité ; elle est due au fait que si

$$0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{H} \to \mathcal{G} \to 0$$

est une suite exacte de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules avec $\mathcal{J}$ injectif, cette suite exacte est scindée par l'injectivité de $\mathcal{J}$, et donc on a des suites exactes associées

$$0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to 0,$$

$$0 \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}) \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to 0.$$

Pour la même raison, les $\mathcal{E}xt$ et les Ext sont des δ-foncteurs à droite relativement à $\mathcal{G}$ et à gauche relativement à $\mathcal{F}$: une suite exacte courte :

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{H} \to \mathcal{G} \to 0$$

induit une suite exacte longue :

$$0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \ldots.,$$

et une suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'' \to 0$$

induit une suite exacte longue :

$$0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \ldots.$$

9.3 Le théorème de dualité de Serre

On va énoncer le théorème de dualité pour les variétés localement intersections complètes :

Théorème 9.5 *Soit X une variété projective définie sur k géométriquement connexe et localement intersection complète de dimension n. Alors on a canoniquement*

$$H^n(X, K_X) \cong k$$

et pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, l'accouplement naturel (de k-espaces vectoriels de dimension finie)

$$H^i(X, \mathcal{F}) \otimes Ext^{n-i}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, K_X) \to H^n(X, K_X)$$

est parfait.

Corollaire 9.6 *Si $\mathcal{F}$ est localement libre sur X, l'accouplement naturel (de k-espaces vectoriels de dimension finie)*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \otimes H^{n-i}(X, \mathcal{F}^* \otimes K_X) \to H^n(X, K_X)$$

est parfait.

Démonstration. En effet, il faut noter que si $\mathcal{F}$ est localement libre sur X,

$$Ext^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong H^i(X, \mathcal{F}^* \otimes \mathcal{G}). \tag{63}$$

Ceci est dû au fait que si $\mathcal{F}$ est localement libre, le foncteur $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{H}om\,(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est exact car $\mathcal{F}$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}_X^r$.

Or le foncteur Hom est un foncteur composé :

$$Hom\,(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \Gamma(X, \mathcal{H}om\,(\mathcal{F}, \mathcal{G})).$$

Prenons une résolution injective $\mathcal{I}^\cdot$ de $\mathcal{G}$. Alors comme le foncteur $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{H}om\,(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est exact,

$$\mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}^\cdot = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^\cdot)$$

est une résolution de $\mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$. De plus, c'est en fait une résolution acyclique de $\mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ par le lemme 9.9. Donc la cohomologie du complexe

$$\Gamma(X, \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}^\cdot),$$

qui calcule par définition $Ext^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, calcule aussi $H^i(X, \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})$.

■

Démonstration du théorème 9.5 dans le cas où $X = \mathbb{P}^n_k$. La preuve se fait par récurrence descendante sur i. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}^n_k$. Il existe d'après le théorème 2.43 une surjection

$$\mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l) \to \mathcal{F}$$

avec $l < 0$, et $r \geq 0$ adéquats. Soit $\mathcal{G}$ le noyau de cette surjection, de sorte qu'on a la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l) \to \mathcal{F} \to 0.$$

Cela induit les suites exactes longues correspondantes :

$$\to H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{G}) \to H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l)) \to H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}) \to H^{i+1}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{G})...$$

$$Ext^{n-i}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{G}, K_{\mathbb{P}^n})^* \to Ext^{n-i}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l), K_{\mathbb{P}^n})^* \to Ext^{n-i}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{F}, K_{\mathbb{P}^n})^*$$
$$\to Ext^{n-i-1}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{G}, K_{\mathbb{P}^n})^* \to ...$$

On a des flèches verticales données par l'accouplement de Serre entre ces deux suites exactes.

Ici il faut distinguer trois cas :

- Si $i + 1 < n$: alors on a d'après le théorème 2.36

$$H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l)) = 0 = H^{i+1}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l)),$$

$$Ext^{n-i}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l), K_{\mathbb{P}^n})^* = H^{n-i}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(l-n-1))^* = 0,$$

et de même

$$Ext^{n-i-1}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l), K_{\mathbb{P}^n})^* = H^{n-i-1}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(l-n-1))^* = 0.$$

Les deux suites exactes se ramènent alors à

$$H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}) \cong H^{i+1}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{G}),$$

$$Ext^{n-i}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{F}, K_{\mathbb{P}^n})^* \cong Ext^{n-i-1}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{G}, K_{\mathbb{P}^n})^*.$$

On peut donc dans ce cas appliquer l'hypothèse de récurrence descendante sur i.

- Si $i = n - 1$. Alors on a d'après le théorème 2.36

$$H^{n-1}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l)) = 0,$$

$$Ext^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l), K_{\mathbb{P}^n})^* = 0.$$

Les deux suites exactes se ramènent alors à

$$0 \to H^{n-1}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}) \to H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{G}) \to H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l)) \dots,$$

$$0 \to Ext^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{F}, K_{\mathbb{P}^n})^* \to Ext^0_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{G}, K_{\mathbb{P}^n})^* \to Ext^0_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l), K_{\mathbb{P}^n})^*.$$

Or on a vu dans le théorème 2.38 que la flèche de dualité donne un isomorphisme

$$H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l)) \cong Ext^0_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l), K_{\mathbb{P}^n})^* = H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(l-n-1))^*.$$

Le lemme des cinq et l'hypothèse de récurrence descendante permettent donc de se ramener au cas $i = n$.

- Si $i = n$. Dans ce cas on a

$$H^{i+1}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{G}) = 0,$$

$$Ext^{n-i-1}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{G}, K_{\mathbb{P}^n})^*.$$

Les suites exactes ci-dessus deviennent donc

$$H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{G}) \to H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l)) \to H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}) \to 0,$$

$$Ext^0_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{G}, K_{\mathbb{P}^n})^* \to Ext^0_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l), K_{\mathbb{P}^n})^* \to Ext^0_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{F}, K_{\mathbb{P}^n})^* \to 0.$$

La flèche de dualité est de plus un isomorphisme entre $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l))$ et $Ext^0_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l), K_{\mathbb{P}^n})^*$ par le théorème 2.38 et l'isomorphisme $K_{\mathbb{P}^n_k} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-n-1)$.

Pour conclure, on recommence avec $\mathcal{G}$, c'est-à-dire qu'on écrit $\mathcal{G}$ comme un quotient de $\mathcal{O}^{r'}_{\mathbb{P}^n}(-l')$. En appliquant ce qu'on a fait précédemment à $\mathcal{G}$, on trouve maintenant un diagramme commutatif où les lignes sont exactes et les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc} H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}^{r'}_{\mathbb{P}^n}(-l')) & \to & H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l)) & \to & H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}) \to 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Ext^0_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{O}^{r'}_{\mathbb{P}^n}(-l'), K_{\mathbb{P}^n})^* & \to & Ext^0_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{O}^r_{\mathbb{P}^n}(-l), K_{\mathbb{P}^n})^* & \to & Ext^0_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{F}, K_{\mathbb{P}^n})^* \to 0 \end{array}.$$

Par le lemme des cinq, on conclut que la flèche de dualité pour $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ est aussi un isomorphisme.

■

Pour le cas général, on a besoin d'un résultat d'algèbre commutative.

Proposition 9.7 *Soient X et Y des variétés définies sur k. Si $X \subset Y$ est localement intersection complète de codimension e, avec Y lisse, on a canoniquement*

$$\bigwedge^e N_{X/Y} \cong \mathcal{E}xt^e_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y).$$

De façon équivalente, par la formule d'adjonction (52) (définissant K_X dans le cas où X n'est pas lisse), on a

$$K_X = \mathcal{E}xt^e_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, K_Y).$$

De plus on a $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y) = 0$ pour $i \neq e$.

Démonstration. Soit localement $g_1, \ldots, g_e$ une suite régulière définissant schématiquement X dans Y. On a vu alors que les dg_i modulo $\mathcal{I}_X \Omega_Y$ engendrent $N^*_{X/Y} = \mathcal{I}_X/\mathcal{I}^2_X$. Soit V le k-espace vectoriel de base v_i. Le même argument que dans la preuve du théorème 7.17 montre qu'on a localement une résolution finie de $\mathcal{O}_X$ par des $\mathcal{O}_Y$-modules libres, appelée résolution de Koszul, et qui a l'allure suivante :

On pose $K_l = \bigwedge^l V \otimes_k \mathcal{O}_Y$, sur lequel on définit la différentielle de Koszul $\delta : K_l \to K_{l-1}$:

$$\delta(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_l}) = \sum_s (-1)^s g_{i_s} v_{i_1} \wedge \ldots \hat{v_{i_s}} \ldots \wedge v_{i_l}.$$

Clairement l'image de $K_1 = V \otimes_k \mathcal{O}_Y$ dans $K_0 = \mathcal{O}_Y$ est l'idéal $\mathcal{I}_X$ et on a un complexe exact

$$0 \to K_e \to \ldots \to K_0 \to \mathcal{O}_X \to 0$$

de $\mathcal{O}_Y$-modules libres.

On obtient donc

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y) = H^i(K^*),$$

où K^* est le complexe dual défini par $K^i = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(K_i, \mathcal{O}_Y)$, la différentielle étant adjointe de δ.

Mais il est facile de voir comme dans la preuve du théorème 7.17 que ce complexe est exact en degré $\neq e$, et que d'autre part sa cohomologie en degré e est isomorphe à

$$Coker\,(\bigwedge^{e-1} V^* \otimes \mathcal{O}_Y \to \bigwedge^{e} V^* \otimes \mathcal{O}_Y),$$

$$v_1^* \wedge \ldots \hat{v_i^*} \ldots \wedge v_e^* \mapsto (-1)^i g_i v_1^* \wedge \ldots \wedge v_e^*.$$

(En effet, ce complexe n'est rien d'autre qu'un complexe de Koszul décalé en indice, comme on le voit en observant que, si l'on choisit un générateur pour $\bigwedge^e V$, on a des isomorphismes naturels :

$$(\bigwedge^{l} V \otimes_k \mathcal{O}_Y)^* \cong \bigwedge^{e-l} V \otimes_k \mathcal{O}_Y).$$

Le conoyau de cette flèche s'identifie à $\bigwedge^e V^* \otimes \mathcal{O}_X \cong \bigwedge^e (\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2)^* \cong \bigwedge^e N_{X/Y}$.

Pour conclure, il reste à montrer que l'isomorphisme obtenu

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y) \cong \bigwedge^{e} N_{X/Y}$$

est canonique, c'est-à-dire qu'il est indépendant du choix de la suite régulière $g_1, \ldots, g_e$. On utilise pour cela le fait que deux suites régulières définissant localement X se déduisent localement l'une de l'autre par une transformation linéaire à coefficients dans $\mathcal{O}_Y$ inversible au voisinage de X. ■

Démonstration du théorème 9.5. Soit X une sous-variété projective lisse géométriquement connexe de dimension d de $\mathbb{P}^n_k$. On montre d'abord le résultat suivant :

Proposition 9.8 *Si $\mathcal{F}$ est un faisceau localement libre sur X, on a une dualité canonique*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{d-i}(X, \mathcal{F}^* \otimes K_X)^* \cong Ext^{d-i}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, K_X)^*.$$

En particulier, par le théorème d'annulation de Serre 2.40, on a $H^i(X, \mathcal{O}_X(-l)) = 0$ pour $i < d = dim\, X = n - e$ et $l >> 0$. De plus $H^d(X, K_X)$ est canoniquement dual de $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$.

Démonstration. Notons que le second énoncé résulte du premier par le théorème d'annulation de Serre 2.40 appliqué à K_X.

Le dernier découle aussi du premier et du fait que si X est projective et géométriquement connexe, on a $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$. En effet, le premier fait entraîne que $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ est de dimension finie sur k. Comme c'est une k-algèbre intègre, puisque X est connexe, ce doit être une extension finie K de k. Mais comme X est géométriquement connexe,

X_K est aussi connexe, et donc $H^0(X_K,\mathcal{O}_{X_K}) = H^0(X,\mathcal{O}_X)\otimes_k K$ est encore intègre. Donc $K = k$.

Pour obtenir la dualité annoncée, on va utiliser la dualité de Serre sur $\mathbb{P}^n_k$: on sait que

$$H^i(X,\mathcal{F}) = H^i(\mathbb{P}^n_k,\mathcal{F}).$$

La dualité de Serre sur $\mathbb{P}^n_k$ montre que cet espace est dual de $Ext^{n-i}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\mathcal{F},K_{\mathbb{P}^n_k})$. Or on a la suite spectrale des *ext*, qui consiste à regarder le foncteur

$$Hom_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\cdot,K_{\mathbb{P}^n_k})$$

comme la composition des foncteurs $\Gamma(\mathbb{P}^n_k,\cdot)$ et du foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\cdot,K_{\mathbb{P}^n_k})$.

Lorsqu'on dispose de deux foncteurs

$$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B},\, G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$$

entre catégories abéliennes, si on suppose d'une part que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ possèdent assez d'injectifs, et d'autre part que pour I un objet injectif de $\mathcal{A}$, $F(I)$ est un objet acyclique pour G, on dispose d'une filtration naturelle décroissante sur les

$$R^i(G\circ F)(M),$$

pour tout objet M de $\mathcal{A}$, et d'une suite spectrale

$$E^{p,q}_r \Rightarrow Gr^p_L R^{p+q}(G\circ F)(M),$$

ayant la propriété que

$$E^{p,q}_2 = R^pG(R^qF)(M).$$

Dans notre cas l'hypothèse est satisfaite grâce au lemme suivant (cf [12], 16.1.2) :

Lemme 9.9 *Si $\mathcal{F}$ est un objet injectif dans la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules, pour tout faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{G}$, le faisceau*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G},\mathcal{F})$$

est flasque sur X.

La suite spectrale correspondante a pour terme

$$E^{p,q}_2 = H^p(\mathbb{P}^n_k,\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\cdot,K_{\mathbb{P}^n_k})).$$

Comme $\mathcal{F}$ est localement libre sur X, il est clair que

$$\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\mathcal{F},K_{\mathbb{P}^n_k}) = \mathcal{F}^*\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\mathcal{O}_X,K_{\mathbb{P}^n_k}).$$

Par la proposition 9.7, on a, notant $e = n-d$,

$$\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\mathcal{O}_X,K_{\mathbb{P}^n_k}) = 0$$

pour $p \neq e$, et

$$\mathcal{E}xt^e_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\mathcal{O}_X,K_{\mathbb{P}^n_k}) = K_X.$$

La suite spectrale des *ext* est donc dégénérée. En effet, elle satisfait $E_2^{p,q} = 0$ pour $q \neq e$. Cela entraîne que $E_r^{p,q} = 0$ pour $q \neq e$, et que les différentielles d_r, $r \geq 2$ sont toutes nulles, car d_r envoie $E_r^{p,q}$ sur $E_r^{p+r,q-r+1}$. Donc on a en fait $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$, et la filtration est triviale, de sorte que l'on obtient par ce qui précède :

$$Ext^{n-i}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\mathcal{F}, K_{\mathbb{P}^n_k})) = E_2^{n-i-e,e} = H^{n-i-e}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}xt^e_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\mathcal{O}_X, K_{\mathbb{P}^n_k}))$$

$$= H^{n-i-e}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} K_X) = H^{n-i-e}(X, \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} K_X),$$

où l'on a utilisé la formule de la proposition 9.7 :

$$K_X = \mathcal{E}xt^e_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\mathcal{O}_X, K_{\mathbb{P}^n_k}).$$

Ceci conclut la démonstration de la proposition 9.8, car $n - e = d$. ■

On conclut maintenant la preuve du théorème 9.5 de la façon suivante (la preuve est d'ailleurs la même que dans le cas de $\mathbb{P}^n_k$) :

D'après la proposition 9.8, on a $H^d(X, K_X) \cong k$, et donc un accouplement naturel

$$H^i(X, \mathcal{F}) \otimes Ext^{d-i}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, K_X) \to H^d(X, K_X) \cong k$$

pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X. Il existe donc une flèche naturelle

$$H^i(X, \mathcal{G}) \to Ext^{d-i}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, K_X)^* \tag{64}$$

dont on veut montrer qu'elle est un isomorphisme. D'après le théorème 2.43, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, on a une suite exacte de la forme

$$0 \to \mathcal{H} \to \mathcal{O}_X(-l)^N \to \mathcal{F} \to 0,$$

où l peut être pris arbitrairement grand, et en particulier peut être supposé satisfaire les conclusions de la proposition 9.8. Cette suite exacte courte fournit d'une part la suite exacte longue de cohomologie

$$\ldots H^{q-1}(X, \mathcal{O}_X(-l)^N) \to H^{q-1}(X, \mathcal{F}) \to H^q(X, \mathcal{H}) \to H^q(X, \mathcal{O}_X(-l)^N) \ldots \tag{65}$$

et d'autre part la suite exacte longue des $Ext^{\cdot}_{\mathcal{O}_X}(, K_X)^*$:

$$\ldots Ext^{d-q+1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(-l)^N, K_X)^* \to Ext^{d-q+1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, K_X)^* \to Ext^{d-q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}, K_X)^* \tag{66}$$
$$\to Ext^{d-q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(-l)^N, K_X)^* \ldots$$

et on peut montrer que les flèches de dualité de Serre (64) sont compatibles avec les suites exactes longues ci-dessous.

En fait, comme on a supposé que $H^j(X, \mathcal{O}_X(-l)) = 0$ pour $d > j > 0$, la suite exacte longue (65) se résume à des isomorphismes

$$H^{q-1}(X, \mathcal{F}) \to H^q(X, \mathcal{H}) \tag{67}$$

pour $q < dim\, X$. De même, grâce à la proposition 9.8, on a $Ext^{d-q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(-l_i)^{N_i}, K_X) = 0$ pour $q < d$ et donc la suite exacte longue (66) fournit un isomorphisme

$$Ext^{d-q-1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, K_X)^* \to Ext^{d-q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}, K_X)^* \tag{68}$$

pour $q < dim\, X$. Les isomorphismes (67) et (68) permettent par une récurrence descendante sur i de se ramener à étudier les cas $i = d-1$ et $i = d$.

Pour $i = d-1$, le raisonnement précédent fournit une suite exacte :

$$0 \to H^{d-1}(X, \mathcal{F}) \to H^d(X, \mathcal{H}) \to H^d(X, \mathcal{O}_X(-l)^N) \tag{69}$$

et de même, on a pour les Ext la suite exacte :

$$0 \to Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, K_X)^* \to Ext^0_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}, K_X)^* \to Ext^0_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(-l)^N, K_X)^* \dots \tag{70}$$

Ces deux suites exactes sont compatibles avec les flèches de dualité (64), et si on sait que ces flèches sont des isomorphismes pour $i = d$, on conclut par le lemme des cinq et (69) et (70) que la première flèche de dualité $H^{d-1}(X, \mathcal{F}) \to Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, K_X)^*$ est aussi un isomorphisme.

Il reste donc à traiter le cas $i = d$. Or on a $H^q(X, \mathcal{G}) = 0$ et également $Ext^{d-q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, K_X)^* = 0$, pour $q > dim\, X$ et tout faisceau cohérent $\mathcal{G}$ sur X.

On obtient donc en degré $i = d$ une suite exacte

$$H^d(X, \mathcal{H}) \to H^d(X, \mathcal{O}_X(-l)^N) \to H^d(X, \mathcal{F}) \to 0$$

et une suite exacte d'Ext :

$$Ext^0_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}, K_X)^* \to Ext^0_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(-l)^N, K_X)^* \to Ext^0_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, K_X)^* \to 0.$$

Reprenant un morphisme surjectif $\mathcal{O}_X(-l')^{N'} \twoheadrightarrow \mathcal{H}'$ avec l' suffisamment grand, on obtient alors deux suites exactes à trois termes compatibles avec les morphismes de dualité de Serre :

$$H^d(X, \mathcal{O}_X(-l')^{N'}) \to H^d(X, \mathcal{O}_X(-l)^N) \to H^d(X, \mathcal{F}) \to 0,$$

$$Ext^0_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(-l')^{N'}, K_X)^* \to Ext^0_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(-l)^N, K_X)^* \to Ext^0_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, K_X)^* \to 0.$$

On a déjà vu que le morphisme de dualité est un isomorphisme pour les $\mathcal{O}_X(-l)$ qui sont localement libres, et donc c'est aussi un isomorphisme pour $\mathcal{F}$ en degré d. ■

9.4 Cas des courbes projectives lisses

9.4.1 Degré des fibrés inversibles et théorème de Riemann-Roch

Soit C une courbe (=variété de dimension 1) projective lisse géométriquement connexe sur un corps k. Les anneaux locaux de C sont alors des anneaux de valuation. Soit $\mathcal{L}$ un fibré inversible sur C et soit σ une section rationnelle non nulle de $\mathcal{L}$. On a défini dans la section 2.3.1 le diviseur de σ, qui est un ensemble de points p de C (définis sur une extension finie de k) affectés de multiplicités données par la valeur de la valuation v_p appliquée à σ, vue comme une fonction grâce à une trivialisation locale de $\mathcal{L}$.

Définition 9.10 *Le degré de $\mathcal{L}$ est défini comme le degré de $div\, \sigma$, défini dans la section 3.6 : Posant $div\, \sigma = \sum_i n_i p_i$, on définit*

$$deg\,(div\, \sigma) = \sum_i n_i deg\,(k(x_i) : k).$$

Cette définition est indépendante du choix de σ. Cela résulte du fait que deux sections rationnelles non nulles de $\mathcal{L}$ sont déduites l'une de l'autre par la multiplication par une fonction rationnelle non nulle sur C et du fait suivant :

Proposition 9.11 *Si ϕ est une fonction rationnelle non nulle sur une courbe projective C, on a $deg\, div\, \phi = 0$.*

Une autre façon de voir l'indépendance par rapport au choix de σ consiste à voir $div\, \sigma$ comme la différence $Z_1 - Z_2$ de deux diviseurs de Weil effectifs sur C, de support disjoint. Ces diviseurs de Weil fournissent des diviseurs de Cartier du fait que les anneaux locaux de C sont des anneaux de valuation : se donner la multiplicité d'une fonction en un point revient à déterminer cette fonction modulo une fonction inversible.

Comme σ a pour diviseur des pôles Z_2 et pour diviseurs des zéros Z_1, on a naturellement une inclusion induite par σ :

$$\mathcal{O}_C(-Z_2) \to \mathcal{L}$$

s'annulant le long de Z_1, et donc une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_C(-Z_2) \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}_{|Z_1} \to 0. \tag{71}$$

On a par ailleurs la suite exacte naturelle :

$$0 \to \mathcal{O}_C(-Z_2) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{Z_2} \to 0. \tag{72}$$

Il est par ailleurs clair par la définition du degré $deg\, Z_i$ que

$$deg\, Z_i = dim_k H^0(Z_i, \mathcal{O}_{Z_i}) = dim_k H^0(Z_i, \mathcal{L}_{|Z_i}).$$

Considérons les suites exactes longues associées aux suites exactes (71) et (72). Compte tenu du fait qu'on a $H^i(Z_i, \mathcal{F}) = 0$ pour $i > 0$, et $\mathcal{F}$ cohérent supporté sur Z_i, on obtient, avec la notation

$$\chi(X, \mathcal{F}) := \sum_i (-1)^i dim_k H^i(X, \mathcal{F}),$$

$$\chi(C, \mathcal{L}) = \chi(C, \mathcal{O}_C(Z_2)) + dim_k H^0(Z_1, \mathcal{O}_{Z_1}) = \chi(C, \mathcal{O}_C(Z_2)) + deg\, Z_1,$$
$$\chi(C, \mathcal{O}_C(-Z_2) = \chi(C, \mathcal{O}_C) - dim_k H^0(Z_2, \mathcal{O}_{Z_2}) = \chi(C, \mathcal{O}_C) - deg\, Z_2.$$

En conclusion, on trouve que

$$\chi(C, \mathcal{L}) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + deg\, Z_1 - deg\, Z_2.$$

Ceci montre que le degré de $\mathcal{L}$ défini comme $deg\, Z_1 - deg\, Z_2$ est indépendant du choix de σ et satisfait la formule

$$\chi(C, \mathcal{L}) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + deg\, \mathcal{L}. \tag{73}$$

Ceci est la moitié de la formule de Riemann-Roch.

On veut maintenant comprendre le terme $\chi(C, \mathcal{O}_C)$ qui apparaît dans la formule de Riemann-Roch (73).

Soit $g := dim_k H^1(C, \mathcal{O}_C)$. g est appelé le genre de C. Par la dualité de Serre, $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ est dual de $H^0(C, K_C)$ et $H^1(C, K_C)$ est dual de $H^0(C, \mathcal{O}_C)$ qui est égal à k car C est projective et géométriquement connexe.

On a donc
$$\chi(C, K_C) = g - 1,\ \chi(C, \mathcal{O}_C) = 1 - g.$$
Par ailleurs, d'après (73), on a aussi
$$\chi(C, K_C) = deg\, K_C + \chi(C, \mathcal{O}_C).$$
On conclut donc que
$$deg\, K_C = \chi(C, K_C) - \chi(C, \mathcal{O}_C) = 2g - 2$$
ou encore
$$\chi(C, \mathcal{O}_C) = -\frac{1}{2} deg\, K_C.$$

9.4.2 Cas complexe

Supposons $k = \mathbb{C}$. On a le point de vue suivant sur le degré des fibrés inversibles sur C.

Par le processus d'analytisation, on déduit de C une variété complexe compacte C^{an} de dimension complexe 1, et de $\mathcal{L}$ un fibré en droites holomorphe $\mathcal{L}^{an}$ sur C^{an}. On dispose de la classe de Chern topologique $c_1(\mathcal{L}^{an}) \in H^2(C^{an}, \mathbb{Z})$, et on sait par le théorème 4.14 que cette classe est représentée en cohomologie de Rham par la forme de Chern $\omega_{L^{an},h}$ de $\mathcal{L}^{an}$ relativement à n'importe quelle métrique h sur $\mathcal{L}^{an}$.

Théorème 9.12 *On a*
$$deg\, \mathcal{L} = \int_{C^{an}} \omega_{L^{an},h}.$$

Démonstration. Soit σ une section rationnelle de $\mathcal{L}$, qu'on voit aussi comme une section méromorphe de $\mathcal{L}^{an}$. Considérons la fonction $h(\sigma)$, qui est strictement positive de classe C^∞ en dehors de $div\, \sigma$. On sait que en dehors de $div\, \sigma$, on a
$$\omega_{L^{an},h} = \frac{\iota}{2\pi} \partial\overline{\partial} log\, h(\sigma). \tag{74}$$
Soient p_i les points du support de $div\, \sigma$, et pour chaque i, soit z_i une coordonnée holomorphe locale sur C^{an} centrée sur p_i. Soient (relativement à ces choix de coordonnée) $D_{i,\epsilon} \subset C^{an}$ les disques centrés en p_i et de rayon ϵ. On a
$$\int_{C^{an}} \omega_{L^{an},h} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{C^{an} \setminus \cup_i D_{i,\epsilon}} \omega_{L^{an},h}.$$
Sur $C^{an} \setminus \cup_i D_{i,\epsilon}$, on a la formule (74), qui s'écrit aussi
$$\omega_{L^{an},h} = -d\left(\frac{\iota}{2\pi} \partial log\, h(\sigma)\right).$$
La formule de Stokes donne alors
$$\int_{C^{an} \setminus \cup_i D_{i,\epsilon}} \omega_{L^{an},h} = \sum_i \int_{\partial D_{i,\epsilon}} \frac{\iota}{2\pi} \partial log\, h(\sigma).$$

Ici les bords des disques sont munis de l'orientation naturelle, qui est l'opposé de leur orientation en temps que bord de $C^{an} \setminus \cup_i D_{i,\epsilon}$, ce qui explique la disparition du signe $-$. Au voisinage de p_i, la section σ_i s'écrit

$$z_i^{n_i}\sigma_i,$$

où σ_i est une section trivialisante de $\mathcal{L}^{an}$. On a donc :

$$h(\sigma) = \mid z_i \mid^{2n_i} h_i = z_i^{n_i}\overline{z}_i^{n_i} h_i,$$

où $h_i = h(\sigma_i)$ est une fonction strictement positive de classe C^∞. Il vient donc au voisinage de p_i :

$$\frac{\iota}{2\pi}\partial log\, h(\sigma) = n_i \frac{\iota}{2\pi}\frac{dz_i}{z_i} + \frac{\iota}{2\pi}\frac{dh_i}{h_i}.$$

Clairement, on a

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial D_{i,\epsilon}} \frac{dh_i}{h_i} = 0,$$

car la forme $\frac{dh_i}{h_i}$ est de classe C^∞ au voisinage de p_i. Il vient donc :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C^{an} \setminus \cup_i D_{i,\epsilon}} \omega_{L^{an},h} = \lim_{\epsilon \to 0} \sum_i \int_{\partial D_{i,\epsilon}} \frac{\iota}{2\pi}\partial log\, h(\sigma)$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \sum_i \int_{\partial D_{i,\epsilon}} \frac{\iota}{2\pi} n_i \frac{dz_i}{z_i} = \sum_i n_i = deg\, \mathcal{L}.$$

9.5 Classe de cycle

Soient $X \subset Y$ deux variétés lisses projectives définies sur k, avec $codim\, X = e$. On supposera pour simplifier que X et Y sont géométriquement connexes (sinon il faut utiliser des arguments de trace). On peut tout d'abord définir une classe de cohomologie

$$[X]^{e,e} \in H^e(Y, \Omega_Y^e)$$

de la façon suivante. Notons que $K_X \cong \Omega^n_{X/k}$, $n = dim\, X$, et qu'on a une flèche de restriction

$$H^n(Y, \Omega^n_{Y/k}) \to H^n(X, \Omega^n_{X/k}). \tag{75}$$

La dualité de Serre montre que $H^n(X, \Omega^n_{X/k}) \cong k$ canoniquement, de sorte que la flèche (75) peut être vue comme une forme linéaire sur $H^n(Y, \Omega^n_{Y/k})$. On observe maintenant que via le produit extérieur

$$\Omega^n_{Y/k} \otimes \Omega^e_{Y/k} \to \Omega^{n+e}_{Y/k} = K_Y,$$

$\Omega^n_{Y/k}$ s'identifie à $Hom\, (\Omega^e_{Y/k}, K_Y)$. La dualité de Serre appliquée à Y (cf corollaire 9.6) montre alors que $H^n(Y, \Omega^n_{Y/k})^*$ est canoniquement isomorphe à $H^e(X, \Omega^e_Y)$. Via cette isomorphisme, la forme linéaire (75) fournit donc une classe $[Z] \in H^e(Y, \Omega^e_Y)$.

9.5.1 Cohomologie locale

Soient $X \subset Y$ deux variétés définies sur k. On va supposer que Y est lisse et que X est localement intersection complète de codimension e.

On veut construire une classe de cycle

$$[X] \in \mathbb{H}^{2e}(Y, \Omega^{\cdot \geq e}_{Y/k})$$

satisfaisant la propriété que son image dans $H^e(Y, \Omega^e_Y)$ par le morphisme naturel de complexes

$$\Omega^{\cdot \geq e}_{Y/k} \to \Omega^e_Y,$$

où Ω^e_Y est mis en degré e, est égale à la classe $[X]^{e,e} \in H^e(Y, \Omega^e_Y)$ construite précédemment, pour X et Y lisses et projectives.

Dans la pratique on s'intéresse plutôt à l'image de cette classe dans

$$F^e H^{2e}_{dR}(Y/k) := Im(\mathbb{H}^{2e}(Y, \Omega^{\cdot \geq e}_{Y/k}) \to \mathbb{H}^{2e}(Y, \Omega^{\cdot}_{Y/k}) H^{2e}_{dR}(Y/k)).$$

Notons que si $car.\, k = 0$, la suite spectrale de Frölicher dégénère en E_1, et cela entraîne que l'application

$$\mathbb{H}^{2e}(Y, \Omega^{\cdot \geq e}_{Y/k}) \to \mathbb{H}^{2e}(Y, \Omega^{\cdot}_{Y/k})$$

est injective.

Pour construire cette classe, on utilise comme dans [2] la notion de *cohomologie locale* le long de X.

Soit $X \subset Y$ un fermé, où Y est un k-schéma de type fini. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur Y. Soit $U := Y \setminus X$. Soit j l'inclusion de U dans Y. le faisceau $j_* \mathcal{F}_{|U}$ est donné par

$$V \mapsto \mathcal{F}(V \cap U).$$

On note $\mathcal{F}_X$ le noyau de l'application

$$\mathcal{F} \to j_* \mathcal{F}_{|U}.$$

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_Y$-modules, $\mathcal{F}_{|U}$ et $j_* \mathcal{F}_X$ le sont aussi.

On note $\Gamma_X(Y, \mathcal{F}) := \Gamma(Y, \mathcal{F}_X)$. Les foncteurs

$$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_X,\ \mathcal{F} \mapsto \Gamma_X(Y, \mathcal{F}) \tag{76}$$

sont exacts à gauche, sur la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_Y$-modules, et à valeurs respectivement dans la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_Y$-modules et dans la catégorie des k-espaces vectoriels.

De plus, le foncteur Γ_X est le composé du foncteur Γ et du foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_X$. On note

$$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{H}^i_Z(Y, \mathcal{F}),\ \mathcal{F} \mapsto H^i_Z(Y, \mathcal{F}),$$

les foncteurs dérivés respectifs des foncteurs (76).

La suite exacte

$$0 \to \mathcal{F}_X \to \mathcal{F} \to j_* \mathcal{F}_{|U}$$

induit une suite exacte longue

$$0 \to \mathcal{F}_X \to \mathcal{F} \to j_*\mathcal{F}_{|U} \to \mathcal{H}^1_X(\mathcal{F}) \to 0 \tag{77}$$

et pour $i > 1$ des isomorphismes

$$R^{i-1}j_*(\mathcal{F}_{|U}) \cong \mathcal{H}^i_X(\mathcal{F}). \tag{78}$$

Le seul résultat dont on aura besoin dans la suite est le suivant :

Théorème 9.13 *Si Y est un k-schéma de type fini et $X \subset Y$ est localement intersection complète de codimension e, on a*

$$\mathcal{H}^i_X(\mathcal{O}_Y) = 0 \text{ pour } i \neq e.$$

Démonstration. C'est évident pour $e = 0$.

En général, pour $i > e > 0$, on utilise les isomorphismes (78). On doit donc montrer que

$$R^i j_*\mathcal{O}_U = 0, \text{ pour } i > e - 1.$$

L'énoncé est local, et on peut donc supposer que Y est affine et que $X \subset Y$ est défini par e équations $f_1, \ldots, f_e$. Alors $U \subset Y$ est couvert par e ouverts affines

$$U_l = \{f_l \neq 0\}.$$

On sait alors (cf proposition 2.31) que $R^i j_*\mathcal{O}_U$ peut être calculé comme la cohomologie du complexe de Čech de faisceaux sur Y :

$$\mathcal{C}^k(\mathcal{F}) = \oplus_{|I|=k+1} j_{I*}\mathcal{F}_{|U_I},$$

où $I \subset \{1, \ldots, e\}$ et U_I est l'ouvert de U défini par $f_i \neq 0, \forall i \in I$, muni de la différentielle de Čech.

Ceci montre immédiatement que $R^i j_*\mathcal{O}_U = 0$ pour $i \geq e$, et donc $\mathcal{H}^i_Z(\mathcal{O}_Y) = 0$ pour $i > e$.

Pour montrer que

$$\mathcal{H}^i_Z(\mathcal{O}_Y) = 0 \text{ pour } i < e,$$

on va montrer plus généralement par récurrence sur l que si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur Y, tel qu'il existe une suite régulière $g_{e-l+1}, \ldots, g_e$, $l \leq e$, relativement à $\mathcal{F}$, alors

$$\mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F}) = 0 \text{ pour } i < l.$$

Ici, la suite $g_{e-l+1}, \ldots, g_e$, $l \leq e$ est dite régulière relativement à $\mathcal{F}$ si $g_{e-l+1+s}$ ne divise pas 0 dans $\mathcal{F}/ < g_{e-l+1}, \ldots, g_{e-l+s} > \mathcal{F}$, $\forall s \leq l-1$.

Considérons la suite exacte

$$0 \to \mathcal{F} \stackrel{g_{e-l+1}}{\to} \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to 0,$$

où $\mathcal{F}' := \mathcal{F}/g_{e-l+1}\mathcal{F}$.

On a une suite exacte induite

$$\to \mathcal{H}^{i-1}_Z(\mathcal{F}') \to \mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F}) \to \mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F}).$$

On utilise maintenant le fait que $\mathcal{F}'$ admet la suite régulière $g_{e-l+2},\ldots,g_e$, et la récurrence sur l pour conclure que

$$\mathcal{H}_Z^{i-1}(\mathcal{F}')=0,\ \forall i<l.$$

Il en résulte que la multiplication par $g_{e-l+1}:\mathcal{H}_Z^i(\mathcal{F})\to\mathcal{H}_Z^i(\mathcal{F})$ est injective. Or il est facile de voir que cette multiplication est nilpotente, en utilisant la description de $\mathcal{H}_Z^i(\mathcal{F})$ à l'aide des cocycles de Čech de $U=Y\setminus Z$ relativement au recouvrement de U par les ouverts $g_s\neq 0$.

■

Construction de $[X]$. Dans la situation précédente, on veut construire $[X]\in\mathbb{H}^{2e}(Y,\Omega^{\cdot\geq e}_{Y/k})$. On va le construire comme l'image d'une classe locale

$$[X]_{loc}\in\mathbb{H}^{2e}_X(Y,\Omega^{\cdot\geq e}_{Y/k}).$$

Etudions tout d'abord la cohomologie locale

$$\mathcal{H}^i_X(\Omega^{\cdot\geq e}_{Y/k}).$$

On a

Lemme 9.14 $\mathcal{H}^i_X(\Omega^{\cdot\geq e}_{Y/k})=0$ *pour* $i<2e$.

Démonstration. En effet, on a la suite spectrale de Frölicher associée à la filtration naïve sur le complexe $\Omega^{\cdot\geq e}_{Y/k}$ et dont le terme $E_1^{p,q}$ est égal à $\mathcal{H}^q_X(\Omega^p_{Y/k})$, $p\geq e$. Pour $p\geq e$, $p+q=i<2e$, on trouve $q<e$, et donc d'après le théorème 9.13, on a $E_1^{p,q}=0$, $p+q=i<2e$. Donc

$$E_\infty^{p,q}=0,\ p+q=i<2e,$$

et comme ce sont les gradués de $\mathcal{H}^i_X(\Omega^{\cdot\geq e}_{Y/k})$ pour la filtration de Hodge, on conclut que $\mathcal{H}^i_X(\Omega^{\cdot\geq e}_{Y/k})=0$.

Corollaire 9.15 *On a un isomorphisme naturel*

$$\mathbb{H}^{2e}_X(Y,\Omega^{\cdot\geq e}_{Y/k})\to H^0(Y,\mathcal{H}^{2e}_X(\Omega^{\cdot\geq e}_{Y/k})).$$

Démonstration. Le foncteur Γ_X est composé du foncteur sections globales $\Gamma(Y,\cdot)$ et du foncteur $\mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}_X$. On admettra que ce dernier foncteur envoie un faisceau injectif sur un faisceau flasque et donc acyclique. On a donc une suite spectrale de terme

$$E_2^{p,q}=H^p(Y,\mathcal{H}^q_X(\Omega^{\cdot\geq e}_{Y/k}))$$

convergeant vers $\mathbb{H}^{2e}_X(Y,\Omega^{\cdot\geq e}_{Y/k})$. Pour $p+q=2e$, le lemme précédent nous dit que le seul terme non nul est $E_2^{0,2e}=H^0(Y,\mathcal{H}^{2e}_Z(\Omega^{\cdot\geq e}_{Y/k}))$. Aucune différentielle non nulle d_r, $r\geq 2$ ne peut aboutir à $E_r^{0,q}$ et les différentielles d_r partant de $E_2^{0,2e}$ aboutissent dans des $E_r^{r,2e+1-r}$, qui sont nuls pour $r\geq 2$, car $E_2^{r,2e+1-r}$ est nul pour $r\geq 0$ par le lemme précédent. Donc on a

$$E_2^{0,2e}=E_\infty^{0,2e},$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{H}^{2e}_X(Y,\Omega^{\cdot\geq e}_{Y/k})=H^0(Y,\mathcal{H}^{2e}_Z(\Omega^{\cdot\geq e}_{Y/k})).$$

■

Soit $(g_1, \ldots, g_e)$ une suite régulière définissant $X \cap V$ dans un ouvert affine $V \subset Y$. Calculant l'hypercohomologie locale

$$\mathcal{H}^{2e}_{X\cap V}(\Omega^{\cdot \geq e}_{V/k}) = R^{e-1}j_*(\Omega^{\cdot \geq e}_{V/k}),$$

où j est l'inclusion de $V \setminus X \cap V$ dans V, à l'aide du recouvrement affine de V par les ouverts $V_i = \{g_i \neq 0\}$, on trouve que la forme

$$\omega_{g.} = \frac{dg_1}{g_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dg_e}{g_e}$$

sur l'ouvert $V_1 \cap \ldots \cap V_e$ définit un $e-1$-cocycle de e-formes fermées, et donc un élément à la fois d-fermé et δ-fermé du complexe de Čech permettant de calculer $\mathbb{H}^{2e-1}(\Omega^{\cdot \geq e}_{V/k})$. On conclut avec le lemme suivant :

Lemme 9.16 *La classe de $\omega_{g.}$ dans $\mathbb{H}^{2e}_{X\cap V}(\Omega^{\cdot \geq e}_{V/k})$ ne dépend pas du choix des g_i.*

Démonstration. On suppose pour simplifier que $car.\, k = 0$. Soient $g_1, \ldots, g_e$ et $g'_1, \ldots, g'_e$ des équations définissant $X \cap V$ dans un ouvert affine V de Y. Soit $x \in X \cap V$. Quitte à restreindre V au voisinage de x, il existe une matrice inversible de fonctions

$$g_{ij} \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V),\ 1 \leq i,\ j \leq e,$$

telle que

$$g'_i = \sum_j g_{ij} g_j.$$

La matrice inversible $g_{ij} \in Gl_e(\mathcal{O}_V)$ peut se factoriser à l'aide de matrices diagonales et de matrices de transvections. Il est évident que pour une transformation diagonale inversible

$$g'_i = a_i g_i,\ a_i \in \mathcal{O}^*_V,\ g'_j = g_j,\ j \neq i,$$

on a

$$\frac{dg'_1}{g'_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dg'_e}{g'_e} = \frac{dg_1}{g_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dg_e}{g_e} + \frac{dg_1}{g_1} \wedge \ldots \wedge \frac{da_i}{a_i} \wedge \ldots \wedge \frac{dg_e}{g_e}.$$

Or la classe du second terme est nul dans $H^{e-1}(V \setminus V \cap X, \Omega^e_Y)$ car c'est une forme sur $V_1 \cap \ldots \cap V_e$ qui s'étend à $V_1 \cap \ldots \widehat{V_i} \ldots \cap V_e$, où V_i est l'ouvert défini par $g_i \not{0}$. Cette classe est donc aussi nulle dans $H^{2e}_{V\cap X}(V, \Omega^e_{V/k})$ et donc aussi dans $\mathbb{H}^{2e}_{V\cap X}(V, \Omega^{\cdot \geq e}_{V/k})$ puisque

$$\mathbb{H}^{2e}_{V\cap X}(V, \Omega^{\cdot \geq e}_{V/k}) = H^{2e}_{V\cap X}(V, \Omega^e_{V/k}),$$

comme le montre le théorème 9.13.

Prenons maintenant le cas d'une transvection.

$$g'_i = g_i,\ i \neq i_0,\ g'_{i_0} = g_{i_0} + g_j,\ j \neq i_0.$$

On considère dans ce cas

$$V \times_k A^1_k$$

sur lequel on a les fonctions

$$G_i = t pr_1^* g_i + (1-t) pr_1^* g'_i.$$

Notons que le sous-schéma défini par G_i, $i = 1, \ldots, e$ est égal à $(X \cap V) \times_k A^1_k$. La forme

$$\Omega = \frac{dG_1}{G_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dG_e}{G_e}$$

sur l'ouvert $\cap_i \{G_i \neq 0\}$ définit donc une classe dans

$$\mathbb{H}^{2e}_{(X \cap V) \times_k A^1_k}(\Omega^{\cdot \geq e}_{Y \times_k A^1_k}).$$

De toute évidence, cette classe a pour restriction la classe de $\omega_{g.}$ en $t = 0$ et celle de $\omega_{g'_.}$ en $t = 1$. Le théorème 8.5 permet donc de conclure que ces deux classes sont égales.

■

Il en résulte que si on a des ouverts V et V', et des suites régulières $g_1, \ldots, g_e$ (resp. $g'_1, \ldots, g'_e$) définissant $X \cap V$ dans V (resp. $X \cap V'$ dans V'), les classes ω_V et $\omega_{V'}$ coïncident dans un voisinage de $V \cap V' \cap X$. Donc les formes ω_V se recollent en une section de

$$H^0(Y, \mathcal{H}^{2e}_X(\Omega^{\cdot \geq e}_{V/k})) = \mathbb{H}^{2e}_X(Y, \Omega^{\cdot \geq e}_{Y/k}).$$

Ceci fournit la classe $[X]_{loc}$ cherchée.

10 Classes de Chern

On se propose de construire les classes de Chern des faisceaux cohérents localement libres (fibrés vectoriels algébriques) sur les variétés algébriques lisses sur k. Ces classes de Chern sont à valeurs dans la cohomologie de de Rham algébrique $H^{\cdot}_{dR}(X/k)$. On verra ensuite comment étendre la définition aux faisceaux cohérents. Enfin on comparera les classes de Chern obtenues aux classes de Chern des fibrés vectoriels complexes sous-jacents aux faisceaux analytiques associés.

10.1 Première classe de Chern

10.1.1 Version cohomologie de de Rham

Soit X une variété algébrique lisse définie sur k et soit E un faisceau localement libre (ou fibré vectoriel) également défini sur k. On définira $c_1(E) = c_1(det\, E)$ où $det\, E = \bigwedge^r E, r = rang\, E$ est un fibré inversible sur X.

On est donc ramené à construire la classe de Chern

$$c_1(L) \in F^1 H^2_{dR}(X/k) = \mathbb{H}^2(X, \Omega^{\cdot \geq 1}_{X/k}),$$

pour L un faisceau inversible sur X. La construction se fait de façon explicite par des trivialisations de L et par le calcul de $\mathbb{H}^2(X, \Omega^{\cdot}_{X/k})$ via la cohomologie de Čech (cf Corollaire 2.31).

Soit $\mathcal{U} = (U_i)$, $i = 1, \ldots, N$ un recouvrement de X par des ouverts affines sur lesquels L est trivial. Donnons-nous des trivialisations $\sigma_i \in \Gamma(U_i, L)$ où σ_i est partout non nulle sur U_i.

Sur l'intersection $U_j \cap U_i$, on a une relation

$$\sigma_i = g_{ij} \sigma_j,$$

où g_{ij} est une fonction inversible. Soit

$$\omega_{ij} := -\frac{dg_{ij}}{g_{ij}} \in \Gamma(U_i, \Omega_{X/k}).$$

Ceci nous donne une cochaîne ω de degré 1 à valeurs dans $\Omega_{X/k}$. On observe que $d\omega_{ij} = 0$ et $\delta(\omega_{ij}) = 0$, où δ est la différentielle de Čech du complexe double

$$C^{l,p} := \check{C}^l(\mathcal{U}, \Omega^p_{X/k}) = \oplus_{|I|=l+1}\Gamma(U_I, \Omega^p_{X/k}),\ p \geq 1$$

qui est tel que la cohomologie du complexe simple $K^\cdot$ associé est égale à $\mathbb{H}^\cdot(X, \Omega^{\cdot\geq 1}_{X/k})$, par le corollaire 2.31.

En effet on a sur U_i,

$$d\omega_{ij} = -d(\frac{dg_{ij}}{g_{ij}}) = \frac{dg_{ij} \wedge dg_{ij}}{g_{ij}^2} = 0,$$

$$(\delta\omega)_{ijk} = \omega_{ij|U_{ijk}} + \omega_{jk|U_{ijk}} + \omega_{ki|U_{ijk}},$$

qui vaut 0 d'après le lemme 10.1 car $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$.

En conclusion, ω est une 1-cochaîne à valeurs dans $\Omega_{X/k}$, qui est à la fois d-fermée et δ-fermée. Elle fournit donc un élément fermé de K^2, dont la classe de cohomologie dans

$$Im\,(H^2(K^\cdot) \to \mathbb{H}^2(X, \Omega^\cdot_{X/k})) = F^1 H^2_{dR}(X/k)$$

est la classe $c_1(L)$ cherchée.

Lemme 10.1 *L'application*

$$d(log) : \mathcal{O}_X^* \to \Omega_{X/k},$$

$$g \mapsto \frac{dg}{g}$$

est un morphisme de faisceaux de groupes sur X.

Démonstration. En effet, on a $d(log\,1) = 0$ car $d(1) = 0$, et d'autre part

$$d(log\,fg) = \frac{d(fg)}{fg} = \frac{fdg + gdf}{fg} = \frac{dg}{g} + \frac{df}{f}.$$

■

Exercice 10.2 *Montrer que cette classe est indépendante du choix de trivialisations locales.*

10.1.2 Version topologique

La première classe de Chern $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ d'un fibré en droites complexes sur un espace topologique X a été définie dans la section 4.1.5 en observant que les classes d'isomorphisme de fibrés en doites complexes topologiques sur X sont en bijection avec $H^1(X, \mathcal{C}_0^*)$, où $\mathcal{C}_0$ est le faisceau des fonctions continues à valeurs complexes, et

$\mathcal{C}_0^*$ est le faisceau des fonctions continues inversibles, c'est-à-dire partout non nulle. On utilise alors la suite exacte exponentielle :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{C}_0 \stackrel{exp\, 2i\pi}{\to} \mathcal{C}_0^* \to 0,$$

qui fournit, puisque $\mathcal{C}_0$ est flasque, un isomorphisme

$$c_1 : H^1(X, \mathcal{C}_0^*) \cong H^2(X, \mathbb{Z}).$$

Supposons maintenant que X est une variété complexe, et que L est un fibré en droites holomorphe. On a vu que

$$H^2(X, \mathbb{C}) \cong \mathbb{H}^2(X, \Omega_X^{\cdot}),$$

ce qui est dû au fait que le complexe de de Rham holomorphe est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}$ sur X.

Calculons l'image de $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ dans $H^2(X, \mathbb{C}) = \mathbb{H}^2(X, \Omega_X^{\cdot})$.

Il faut tout d'abord utiliser la suite exacte exponentielle qui donne explicitement la flèche c_1. Si L est un fibré en droites holomorphes, choisissons un recouvrement de X par des ouverts U_i sur lesquels L est trivial, et soit σ_i une section non nulle de L sur U_i. On a comme plus haut des fonctions de transition $g_{ij} \in \Gamma(U_{ij}\mathcal{O}_X^*)$ données par $\sigma_i = g_{ij}\sigma_j$ et satisfaisant la condition de cocycle sur U_{ijk}

$$g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1.$$

La classe de ce cocycle dans $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, par définition, paramètre L. D'après la suite exacte exponentielle, pour obtenir la classe $c_1(L)$, il faut supposer que les U_i sont assez petits pour que

$$g_{ij} = exp\, 2i\pi f_{ij},$$

et la classe $c_1(L)$ admet alors pour représentant de Čech le cocycle

$$a_{ijk} = f_{ij} + f_{jk} + f_{ki},$$

qui est bien à valeurs dans $\mathbb{Z}$ puisque $exp\, 2i\pi a_{ijk} = g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$.

Si l'on utilise maintenant, pour calculer $H^2(X, \mathbb{C})$, comme dans la preuve du théorème 4.14, le complexe simple associé au complexe double Čech-de Rham holomorphe pour le recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)$ donné par

$$K^{p,q} = \check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U}, \Omega_X^p),\ D_1 = d,\ D_2 = (-1)^p\delta,$$

$$K^l = \oplus_{p+q=l} K^{p,q},\ D = D_1 + D_2,$$

on trouve que dans ce complexe, on a

$$(a_{ijk}) = \delta(f_{ij}) = D(f_{ij}) - (df_{ij}).$$

Ainsi, un représentant de $c_1(L)$ est donné par le 1-cocycle de 1-formes holomorphes fermées $(-df_{ij})$.

10.1.3 Comparaison

On va supposer maintenant que X est une variété projective définie sur $\mathbb{C}$. Si L est un faisceau inversible sur X, on dispose donc du faisceau inversible (fibré en droites holomorphe) L^{an} sur X^{an} et donc des deux classes de Chern

$$c_1(L) \in H^2_{dR}(X/\mathbb{C}),\ c_1(L^{an}) \in H^2(X^{an}, \mathbb{C}).$$

Montrons maintenant :

Proposition 10.3 *Via la flèche naturelle* $F^1H^2_{dR}(X/\mathbb{C}) \to H^2_{dR}(X/\mathbb{C})$ *et l'isomorphisme de comparaison*

$$H^2_{dR}(X/\mathbb{C}) \cong H^2(X^{an}, \mathbb{C}),$$

la classe algébrique $c_1(L)$ *est envoyé sur* $2i\pi c_1(L^{an})$.

Démonstration. Utilisons un recouvrement affine $\mathcal{U} = (U_i)$ de X trivialisant pour L, avec des fonctions de transition g_{ij} sur U_{ij}. Ce recouvrement fournit également un recouvrement ouvert de X^{an} trivialisant pour L^{an}.

Avec les notations de la section 10.1.1, on a vu plus haut que $c_1(L) \in \mathbb{H}^2(X, \Omega^{\cdot}_{X/\mathbb{C}})$ est représentée par le 1-cocycle de Čech de 1-formes fermées donné par $\omega_{ij} = -\frac{dg_{ij}}{g_{ij}} \in \Omega_{U_{ij}}$, qui est à la fois d et δ-fermé.

Par ailleurs, quitte à raffiner le recouvrement pour la topologie usuelle, de façon à garantir que les g_{ij} sont des exponentielles globales :

$$g_{ij} = exp(2\iota\pi f_{ij}),$$

on a vu aussi que

$$c_1(L^{an}) \in H^2(X^{an}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{H}^2(X^{an}, \Omega^{\cdot}_{X^{an}})$$

est représenté par le 1-cocycle $-df_{ij}$ de 1-formes holomorphes fermées. Or $-df_{ij} = -\frac{1}{2i\pi}\frac{dg_{ij}}{g_{ij}}$.

∎

10.2 Construction générale

10.2.1 Cohomologie de $\mathbb{P}^n_k$

On se propose de montrer le résultat suivant

Théorème 10.4 *On a*

$$H^q(\mathbb{P}^n_k, \Omega^p_{\mathbb{P}^n_k/k}) = 0,\ p \neq q,$$

et

$$H^p(\mathbb{P}^n_k, \Omega^p_{\mathbb{P}^n_k/k}) = kc_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1))^p,\ p \leq n,\ H^p(\mathbb{P}^n_k, \Omega^p_{\mathbb{P}^n_k/k}) = 0,\ p > n.$$

Remarque 10.5 Ici, on considère le c_1 algébrique faible à valeurs dans $H^1(\mathbb{P}^n_k, \Omega_{\mathbb{P}^n_k/k})$. C'est l'image du c_1 à valeurs dans $H^1(\mathbb{P}^n_k, \Omega^{\bullet\geq 1}_{\mathbb{P}^n_k/k})$ défini dans la section précédente, dans $H^1(\mathbb{P}^n_k, \Omega_{\mathbb{P}^n_k/k})$ par l'application naturelle de complexes :

$$\Omega^{\bullet\geq 1}_{\mathbb{P}^n_k/k} \to \Omega_{\mathbb{P}^n_k/k},$$

où le terme de droite est le complexe constitué du faisceau $\Omega_{\mathbb{P}^n_k/k}$ placé en degré 1.

Démonstration du théorème 10.4. On utilise la suite exacte d'Euler (cf Proposition 9.2) :

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}^n_k/k} \to V \otimes_k \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \to 0. \tag{79}$$

La suite exacte (79) nous donne une suite exacte :

$$0 \to \Omega^p_{\mathbb{P}^n_k/k} \to \bigwedge^p V \otimes_k \mathcal{O}(-p) \to \Omega^{p-1}_{\mathbb{P}^n_k/k} \to 0.$$

Pour $0 < p < n+1$, on a déjà vu (théorèmes 2.36 et 2.38) que

$$H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(-p)) = 0, \, \forall i \geq 0,$$

d'où il résulte que

$$H^q(\mathbb{P}^n_k, \Omega^p_{\mathbb{P}^n_k/k}) \cong H^{q-1}(\mathbb{P}^n_k, \Omega^{p-1}_{\mathbb{P}^n_k/k}).$$

Le résultat se montre donc par récurrence sur p. Pour $p = 0$, c'est la proposition 1.5. En général on conclut de cette manière que $H^q(\mathbb{P}^n_k, \Omega^p_{\mathbb{P}^n_k/k}) = 0$ pour $p \neq q$, et est égal à k pour $p = q \leq n$. Il reste seulement à voir qu'un générateur de $H^p(\mathbb{P}^n_k, \Omega^p_{\mathbb{P}^n_k/k})$ est donné par $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1))^p$. Cela résulte de la preuve donnée ci-dessus, et du fait que la classe d'extension e de la suite exacte d'Euler est égale à $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1))$.

Ici la classe d'extension e est définie comme l'image de $1 \in H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k})$ dans $H^1(\mathbb{P}^n_k, \Omega_{\mathbb{P}^n_k/k})$ dans la suite exacte longue de cohomologie associée à (79).

∎

Remarque 10.6 Le fait que la classe e soit égale à $c_1(\mathcal{O}(1))$ est un cas particulier d'un énoncé plus général, concernant les fibrés de 1-jets. Il se trouve que le fibré des 1-jets de $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^n_k$ est le fibré trivial $V \otimes \mathcal{O}(1)$, ce qui dit qu'une section globale de $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^n_k$ est déterminée par sa valeur en un point et sa différentielle en ce point.

En général, étant données une variété lisse X et un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X, on peut introduire le fibré $P^1(\mathcal{L})$ des 1-jets de $\mathcal{L}$, qui s'inscrit dans une suite exacte généralisant la suite exacte d'Euler

$$0 \to \Omega_{X/k}(\mathcal{L}) \to P^1(\mathcal{L}) \to \mathcal{L} \to 0.$$

La classe d'extension de cette suite exacte est égale à $c_1(\mathcal{L})$.

Revenant à la cohomologie des fibrés projectifs, la même preuve (utilisant la version relative de la suite exacte d'Euler) donne le résultat suivant : Soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre de rang r sur une variété X. Soit $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$ la projection naturelle. Rappelons que $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ est naturellement muni d'un fibré $\mathcal{O}(1)$ tel que $\pi_*\mathcal{O}(1) = \mathcal{E}$.

Théorème 10.7 *On a $R^p\pi_*\Omega^q_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/X} = 0$ pour $p \neq q$ et $p \geq r$. De plus, pour $p \leq r-1$, $R^p\pi_*\Omega^p_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/X} \cong \mathcal{O}_X$, un générateur canonique étant donné par $c_1(\mathcal{O}(1))^p$.*

Remarque 10.8 Le faisceau $\Omega_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/X}$ introduit ici est le faisceau des différentielles de Kähler relatives, qu'on peut définir comme le conoyau de la flèche de pull-back :

$$\pi^*\Omega_X \to \Omega_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$$

ou encore plus directement comme le faisceau des différentielles de Kähler de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ sur $\pi^*\mathcal{O}_X$.

10.2.2 Calcul de la cohomologie de de Rham d'un fibré projectif

Soit E un fibré vectoriel algébrique de rang r sur une variété algébrique lisse X définie sur k et $\mathcal{E}$ le faisceau cohérent localement libre correspondant, c'est-à-dire que $\mathcal{E}$ est le faisceau des sections de E. Soit $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\mathcal{E}^*)$ le fibré projectif associé (cf section 3.5.1).

Théorème 10.9 *L'algèbre de cohomologie de de Rham*

$$H^{\cdot}_{dR}(\mathbb{P}(E)/k)$$

est librement engendrée comme $H^{\cdot}_{dR}(X/k)$-module par

$$1,\, c_1(\mathcal{O}(1)), \ldots, c_1(\mathcal{O}(1))^{r-1}.$$

Le même résultat est vrai pour $\oplus_l F^l H^{2l}_{dR}(\mathbb{P}(E)/k)$.

(Pour la définition de $\mathcal{O}(1)$, voir section 2.3.2.)

On a utilisé ici l'existence d'une structure d'algèbre sur la cohomologie de de Rham (cf section 8.1.1). On rappelle qu'elle est tout simplement induite par le produit extérieur sur le complexe de de Rham.

On renvoie à [12] pour la preuve du résultat analogue concernant la cohomologie de Betti d'un fibré projectif de la forme $\mathbb{P}(E)$ sur une base analytique.

Soit $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ le morphisme naturel. On montre d'abord l'analogue de ce résultat pour les groupes de cohomologie de Dolbeault

$$H^q(\mathbb{P}(E), \Omega^p_{\mathbb{P}(E)/k})$$

qui sont les termes $E_1^{p,q}$ de la suite spectrale d'hypercohomologie du complexe de de Rham algébrique pour la filtration de Hodge. Ici on remplace les classes $c_1(\mathcal{O}(1))^i$ par leurs versions plus faibles

$$(c_1(\mathcal{O}(1))^{1,1})^i \in H^i(\Omega^i_{\mathbb{P}(E)/k})$$

qu'on a déjà utilisées et notées abusivement $c_1(\mathcal{O}(1))^i$.

Proposition 10.10 *Le morphisme naturel*

$$\sum_{0\leq i\leq inf(p,q,r-1)} c_1(\mathcal{O}(1))^i : \oplus_{0\leq i\leq inf(p,q,r-1)} H^{q-i}(X, \Omega^{p-i}_{X/k}) \to H^q(\mathbb{P}(E), \Omega^p_{\mathbb{P}(E)/k}) \quad (80)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. L'isomorphisme (80) va résulter du théorème 10.7 qu'on utilise de la façon suivante : Le faisceau $\Omega_{\mathbb{P}(E)/k}$ s'inscrit dans la suite exacte définissant le faisceau cotangent relatif :

$$0 \to \pi^*\Omega_{X/k} \to \Omega_{\mathbb{P}(E)/k} \to \Omega_{\mathbb{P}(E)/X} \to 0.$$

Cela entraîne que $\Omega^p_{\mathbb{P}(E)/k}$ admet une filtration

$$L^i\Omega^p_{\mathbb{P}(E)/k} := \pi^*\Omega^i_{X/k} \wedge \Omega^{p-i}_{\mathbb{P}(E)/k},$$

dont le gradué est donné par

$$Gr^i_L(\Omega^p_{\mathbb{P}(E)/k}) = \pi^*\Omega^i_X \otimes \Omega^{p-i}_{\mathbb{P}(E)/X}.$$

Montrons maintenant :

Lemme 10.11 *On a pour tous j, p, et tout i tel que $p-i \leq r-1$ un isomorphisme*

$$H^{j-p+i}(X, \Omega^i_{X/k}) \cong H^j(\mathbb{P}(E), Gr^i_L(\Omega^p_{\mathbb{P}(E)/k}))$$

donné par la composition du pull-back et du cup-produit par la classe relative

$$c_1(\mathcal{O}(1))^{p-i} \in H^{p-i}(\mathbb{P}(E), \Omega^{p-i}_{\mathbb{P}(E)/X}).$$

Démonstration. Considérons la suite spectrale de Leray associée au morphisme π_*. Cette suite spectrale est la suite spectrale du foncteur $\Gamma(\mathbb{P}(E), \cdot)$ des sections globales sur $\mathbb{P}(E)$, qu'on voit comme un foncteur composé : en effet, c'est le composé du foncteur

$$\pi_* : \mathcal{F} \mapsto \pi_* \mathcal{F},$$

qui va de la catégorie des faisceaux sur $\mathbb{P}(E)$ dans celle des faisceaux sur X, et du foncteur $\Gamma(X, \cdot)$ du foncteur de sections globales sur X.

Comme $\pi_* \mathcal{I}$ est flasque pour $\mathcal{I}$ injectif sur $\mathbb{P}(E)$, on a pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}(E)$, une suite spectrale de terme

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q \pi_* \mathcal{F})$$

qui converge vers le gradué de $H^{p+q}(\mathbb{P}(E), \mathcal{F})$ pour une certaine filtration, appelée filtration de Leray.

Appliquons ceci à

$$\mathcal{F} = Gr^i_L \Omega^p_{\mathbb{P}(E)/k} = \pi^* \Omega^i_X \otimes \Omega^{p-i}_{\mathbb{P}(E)/X}.$$

D'après le théorème 10.7, $R^q \pi_* \mathcal{F} = 0$ pour $q \neq p-i$, et pour $q = p-i \leq r-1$ on a

$$R^q \pi_* \mathcal{F} \cong \Omega^i_{X/k} \otimes c_1(\mathcal{O}(1))^{p-i}.$$

La suite spectrale de Leray de ce faisceau est donc dégénérée car elle satisfait $E_2^{p,q} = 0$ pour $q \neq p-i$. On a donc $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ et de plus la filtration de Leray induite sur $H^{p+q}(\mathbb{P}(E), \pi^* \Omega^i_X \otimes \Omega^{p-i}_{\mathbb{P}(E)/X})$ est triviale, car seul le gradué de type (p,q) avec $q = p-i$ est non nul. On a donc bien montré que pour tout j, et tout i tel que $p-i \leq r-1$,

$$H^j(\mathbb{P}(E), \pi^* \Omega^i_X \otimes \Omega^{p-i}_{\mathbb{P}(E)/X}) \cong E_2^{j-p+i, p-i} = H^{j-p+i}(X, \Omega^i_{X/k}),$$

où l'isomorphisme est donné par le cup-produit avec la classe $c_1(\mathcal{O}(1))^{p-i}$. ■

L'isomorphisme (80) est maintenant une conséquence facile du lemme 10.11. En effet, calculons $H^q(\mathbb{P}(E), \Omega^p_{\mathbb{P}(E)/k})$ de façon explicite, par exemple en cohomologie de Čech relative à un recouvrement affine $\mathcal{U}$ de $\mathbb{P}(E)$. Choisissons pour $0 \leq i \leq inf(r-1, p)$ des représentants explicites α_i de $c_1(\mathcal{O}(1))^i$ comme cocycles de Čech à valeurs dans $\Omega^i_{\mathbb{P}(E)/k}$. Alors comme les α_i sont δ-fermés, on a un morphisme de complexes filtrés

$$\oplus_{0 \leq i \leq inf(p,r-1)} \check{\mathrm{C}}^{\cdot - i}(\mathcal{U}, \pi^* \Omega^{p-i}_X) \stackrel{\sum_i \alpha_i \cdot}{\to} \check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathcal{U}, \Omega^p_{\mathbb{P}(E)/k}),$$

où la filtration sur le terme de gauche est donnée par

$$L^j(\oplus_{0 \leq i \leq inf(p,r-1)} \check{\mathrm{C}}^{\cdot - i}(\mathcal{U}, \pi^* \Omega^{p-i}_X)) = \oplus_{0 \leq i \leq inf(p,r-1),\, p-i \geq j} \check{\mathrm{C}}^{\cdot - i}(\mathcal{U}, \pi^* \Omega^{p-i}_X).$$

On a donc un morphisme de suites spectrales convergeant vers le morphisme induit en cohomologie, à savoir le morphisme (80)

$$\oplus_{0\leq i\leq inf(q,p,r-1)}H^{q-i}(X,\Omega^{p-i}_{X/k})\stackrel{\sum_i c_1(\mathcal{O}(1))^i}{\rightarrow} H^q(\mathbb{P}(E),\Omega^p_{\mathbb{P}(E)/k}).$$

Or le lemme 10.11 dit précisément que les morphismes induits sur les termes $E_1^{p,q}$ sont des isomorphismes. Il en résulte que (80) est un isomorphisme. Ceci conclut la preuve de la proposition 10.10. ∎

Démonstration du théorème 10.9. Maintenant qu'on a montré le résultat au niveau des groupes de cohomologie de Dolbeault, on conclut en regardant la suite spectrale de Frölicher du complexe de de Rham de $\mathbb{P}(E)$, dont le terme $E_1^{p,q}$ est précisément $H^q(\mathbb{P}(E),\Omega^p_{\mathbb{P}(E)/k})$.

Plus précisément, considérons un recouvrement affine $\mathcal{V}$ de $\mathbb{P}(E)$, subordonné à un recouvrement affine $\mathcal{U}$ de X. On dispose alors des complexes

$$K^\cdot_{\mathcal{V}},\, \mathcal{K}^\cdot_{\mathcal{U}}$$

donnés dans (55), calculant respectivement $\mathbb{H}^\cdot(\mathbb{P}(E),\Omega^\cdot_{\mathbb{P}(E)/k}) = H^\cdot_{dR}(\mathbb{P}(E)/k)$ et $\mathbb{H}^\cdot(X,\Omega^\cdot_{X/k}) = H^\cdot_{dR}(X/k)$, c'est-à-dire

$$K^\cdot_{\mathcal{V}}=\oplus_{p+q=\cdot}\check{C}^p(\mathcal{V},\Omega^q_{\mathbb{P}(E)/k}),\, D=d\pm\delta,$$

$$K^\cdot_{\mathcal{U}}=\oplus_{p+q=\cdot}\check{C}^p(\mathcal{U},\Omega^q_{X/k}),\, D=d\pm\delta.$$

Choisissant des représentants explicites fermés $\alpha_i\in K^i_{\mathcal{V}}$ des classes $c_1(\mathcal{O}(1))^i$, $i=0,\ldots,r-1$, on obtient un morphisme de complexes

$$\oplus_{0\leq i\leq r-1}K^{\cdot-2i}_{\mathcal{U}}\stackrel{\sum_i\alpha_i\cdot}{\rightarrow} K^\cdot_{\mathcal{V}}.$$

Ce morphisme est compatible aux filtrations naïves, si on prend pour α_i un i-cocycle fermé de i-formes fermées (comme c'est possible comme on l'a vu quand on a construit c_1). Il induit donc un morphisme de suites spectrales de Frölicher. Le calcul précédent montre que c'est un isomorphisme en E_1, et donc aussi en E_∞. Cela entraîne que le morphisme induit

$$\oplus_{0\leq i\leq r-1}H^{\cdot-2i}_{dR}(X/k)\stackrel{\sum_i\alpha_i\cdot}{\rightarrow} H^\cdot_{dR}(\mathbb{P}(E)/k)$$

est bien un isomorphisme filtré.

∎

On est maintenant en mesure de définir les classes de Chern

$$c_i(\mathcal{E})=c_i(E)\in\mathbb{H}^{2i}_{dR}(X/k)$$

de E. D'après le théorème 10.9, la classe $\xi:=c_1(\mathcal{O}(1))\in H^2_{dR}(\mathbb{P}(E)/k)$ satisfait dans l'algèbre $H^\cdot_{dR}(\mathbb{P}(E)/k)$ une unique équation polynomiale à coefficients dans $H^\cdot_{dR}(X/k)$:

$$\xi^r+\sum_{i<r}\pi^*\alpha_i\xi^{r-i}=0,$$

où π est la projection de $\mathbb{P}(E)$ sur X, et où on sait que

$$\pi^* : H^{\cdot}_{dR}(X/k) \to H^{\cdot}_{dR}(\mathbb{P}(E)/k)$$

est injective. Ceci détermine donc les α_i, et on pose $c_i(E) = \alpha_i$ pour $i = 1, \ldots, r$ et $c_0(E) = 1$.

Ceci définit les classes de Chern algébriques de E. Notons que la définition des classes de Chern montre aussi leur fonctorialité :

Théorème 10.12 *Soit $\phi : Y \to X$ un morphisme entre deux variétés lisses définies sur un corps k. Alors on a pour tout faisceau localement libre $\mathcal{E}$ défini sur X,*

$$\phi^* c_i(\mathcal{E}) = c_i(\phi^*\mathcal{E}) \text{ dans } H^{2i}_{dR}(Y/k).$$

Démonstration. Cela résulte en effet de la fonctorialité évidente de la classes de Chern $c_1(\mathcal{L})$ pour les faisceaux inversibles $\mathcal{L}$, et du fait que si on a un morphisme $\phi : Y \to X$, on a un morphisme induit

$$\tilde{\phi} : \mathbb{P}(\phi^* E) \to \mathbb{P}(E)$$

tel que

$$\tilde{\phi}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\tilde{\phi}^* E)}(1).$$

∎

Remarque 10.13 On pourrait ici remplacer $H^{2i}_{dR}(Y/k)$ par $F^i H^{2i}_{dR}(Y/k)$.

Notons que la construction analogue pour les classes de Chern topologiques $c_i(E^{an})$, dans le cas où $k = \mathbb{C}$, et la proposition 10.3 montrent que via la comparaison Betti-de Rham de Grothendieck (Corollaire 8.7) on a :

$$c_l(E) = (2i\pi)^l c_l(E^{an}),\ \forall l \geq 0.$$

10.2.3 Formule de Whitney

Soient E, F, G des fibrés vectoriels algébriques sur une variété algébrique X définie sur un corps k de caractéristique sur 0 (ou des fibrés vectoriels holomorphes sur une variété analytique, ou des fibrés vectoriels complexes topologiques sur un espace topologique). Dans le premier cas on considérera les classes de Chern algébriques à valeurs dans la cohomologie de de Rham, et dans les autres cas, les classes de Chern topologiques à valeurs dans la cohomologie de Betti. On suppose qu'on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0 \tag{81}$$

de faisceaux correspondants de sections. La formule de Whitney est la suivante.

Théorème 10.14 *On a*

$$c(F) = c(E)c(G) \text{ dans } H^{\cdot}_{dR}(X/k),$$

où la classe de Chern totale est définie par

$$c(E) = c_0(E) + \ldots + c_r(E),\ r := rang\, E.$$

Remarque 10.15 La formule de Whitney analogue pour les classes de Chern topologiques est montrée dans [12], 11.2. Elle est parfois utilisée comme axiome déterminant les classes de Chern. C'est ce qu'on fera plus loin pour les faisceaux cohérents.

Démonstration du théorème 10.14. On va d'abord supposer que la suite exacte ci-dessus est scindée, c'est-à-dire que

$$\mathcal{F} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{G}.$$

Soient r le rang de E et s celui de G. Notons P_E le polynôme $P_E(t) = t^r + c_1(E)t^{r-1} + \ldots + c_r(E)$, et définissons de même P_F et P_G. L'égalité $c(F) = c(E)c(G)$, décomposée degré par degré, est équivalente à l'égalité

$$P_F = P_E P_G,$$

et vu la définition de P_F, il suffit de montrer que l'on a

$$P_E(\xi)P_G(\xi) = 0 \text{ dans } H_{dR}^{2(r+s)}(\mathbb{P}(F)/k),$$

où $\xi := c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1))$. Or $\mathbb{P}(F)$ contient le sous-fibré vectoriel $\mathbb{P}(E)$ qui est de codimension s, et on a une projection linéaire

$$\pi : \mathbb{P}(F) \dashrightarrow \mathbb{P}(G)$$

(correspondant dualement au morphisme d'$\mathcal{O}_X$-algèbres graduées

$$Sym\,\mathcal{G}^* \to Sym\,\mathcal{F}^*),$$

bien définie en dehors de $\mathbb{P}(E)$ et telle que

$$\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(G)}(1)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1)$$

dans l'ouvert $\mathbb{P}(F) \setminus \mathbb{P}(E)$. Par la définition de P_G, on trouve donc que la classe $P_G(\xi) \in F^s H_{dR}^{2s}(\mathbb{P}(G))$ s'annule sur cet ouvert.

De même, $\mathbb{P}(F)$ contient le sous-fibré vectoriel $\mathbb{P}(G)$ qui est de codimension s, et on a une projection linéaire

$$\pi' : \mathbb{P}(F) \dashrightarrow \mathbb{P}(E)$$

bien définie en dehors de $\mathbb{P}(G)$ et telle que

$$\pi'^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1)$$

dans l'ouvert $\mathbb{P}(F) \setminus \mathbb{P}(G)$. Par la définition de P_F, on trouve donc que la classe $P_E(\xi) \in F^s H_{dR}^{2s}(\mathbb{P}(G))$ s'annule sur cet ouvert.

Or la réunion des deux ouverts $\mathbb{P}(F) \setminus \mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(F) \setminus \mathbb{P}(G)$ est égale à $\mathbb{P}(F)$. On est donc ramené à montrer que si on a deux ouverts de Zariski U et V couvrant une k-variété lisse X, et deux classes de cohomologie de de Rham α, $\beta \in H_{dR}(X/k)$ telles que $\alpha_{|U} = 0$, $\beta_| V = 0$, alors

$$\alpha \cdot \beta = 0 \text{ dans } H_{dR}(X/k).$$

Il faut pour cela utiliser la notion de cohomologie (ou hypercohomologie) à support dans $Z_U := X \setminus U$, $Z_V := X \setminus V$, introduite dans la section 9.5.1. L'hypothèse dit que α provient d'une classe dans $\mathbb{H}_{Z_U}(\Omega^{\cdot}_{X/k})$, et que β provient d'une classe dans $\mathbb{H}_{Z_V}(\Omega^{\cdot}_{X/k})$. Alors le cup-produit $\alpha \cdot \beta$ provient d'une classe dans $\mathbb{H}_{Z_U \cap Z_V}(\Omega^{\cdot}_{X/k})$ qui est nul car $Z_U \cap Z_V = \emptyset$.

Il reste à expliquer comment se ramener au cas où $\mathcal{F} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{G}$. On va utiliser pour cela le théorème 8.5 et la proposition 10.16 :

Proposition 10.16 *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre sur X donné par une suite exacte (81). Alors il existe un faisceau localement libre $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $X \times_k A^1_k$ qui s'inscrit dans une suite exacte*

$$0 \to pr_1^*\mathcal{E} \to \tilde{\mathcal{F}} \to pr_1^*\mathcal{G} \to 0$$

et qui a la propriété que

$$\tilde{\mathcal{F}}_{|X\times 1} = \mathcal{F},\ \tilde{\mathcal{F}}_{|X\times 0} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{G}. \tag{82}$$

En admettant la proposition 10.16, la démonstration se termine de la façon suivante : Considérons la classe de Chern totale de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $X \times_k A^1_k$. D'après le théorème 8.5, on a

$$c(\tilde{\mathcal{F}}_{|X\times 1}) = c(\tilde{\mathcal{F}}_{|X\times 0}).$$

Or le terme de gauche est égal à $c(\mathcal{F})$, et celui de droite à $c(\mathcal{E} \oplus \mathcal{G})$. Le cas scindé nous donne alors $c(\mathcal{F}) = c(\mathcal{E})c(\mathcal{G})$. ■

Démonstration de la proposition 10.16. L'idée est très simple : l'extension de la suite exacte (81) est caractérisée par une classe $e \in H^1(X, \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{E}))$. On va construire une extension de $pr_1^*\mathcal{G}$ par $pr_1^*\mathcal{E}$ en considérant la classe

$$te \in H^1(X \times_k A^1_k, \mathcal{H}om(pr_1^*\mathcal{G}, pr_1^*\mathcal{E})),$$

où $A^1_k = Spec\, k[t]$.

Concrètement, soit U_i un recouvrement ouvert de X tel que sur chaque U_i, on dispose d'une section $\sigma_i : \mathcal{G}_{|U_i} \to \mathcal{F}_{|U_i}$. Alors sur $U_i \cap U_j$, $\sigma_{ij} := \sigma_i - \sigma_j$ est une section de $\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{E})$. les σ_{ij} satisfont de façon évidente la condition de cocycle qui détermine un élément de $H^1(X, \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{E}))$. De plus, en utilisant les scindages ci-dessus, le faisceau $\mathcal{F}$ est décrit de la façon suivante :

$$\mathcal{F}(U) = \{(e_i, g) \in \oplus_i \mathcal{E}(U \cap U_i) \oplus \mathcal{G}(U),\ e_j - e_i = \sigma_{ij}(g) \text{ sur } U \cap U_i \cap U_j\}.$$

Définissons le faisceau $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $X \times_k A^1_k$ par

$$\tilde{\mathcal{F}}(U) = \{(e_i, g) \in \oplus_i pr_1^*\mathcal{E}(U \cap pr_1^{-1}(U_i) \oplus pr_1^*\mathcal{G}(U),\ e_j - e_i = t\sigma_{ij}(g) \text{ sur } U \cap U_i \cap U_j\}.$$

Il est évident que $\tilde{\mathcal{F}}$ s'inscrit dans une extension

$$0 \to pr_1^*\mathcal{E} \to \tilde{\mathcal{F}} \to pr_1^*\mathcal{G} \to 0,$$

(en particulier $\tilde{\mathcal{F}}$ est localement libre) et que (82) est satisfait.

10.2.4 Principe de scindage

En combinant les théorèmes 10.9 et 10.14, on peut obtenir de nombreux résultats formels sur les classes de Chern d'un faisceau localement libre $\mathcal{E}$ sur une variété lisse X définie sur un corps k.

Théorème 10.17 *(Principe de scindage) Soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre sur X. Alors il existe une variété algébrique lisse Y définie sur k, et un morphisme projectif surjectif*

$$\phi : Y \to X$$

tel que $\phi^*\mathcal{E}$ admette une filtration par des sous-faisceaux localement libres dont les gradués successifs sont des faisceaux inversibles sur Y.

De plus on peut supposer que

$$\phi^* : H^{\cdot}_{dR}(X/k) \to H^{\cdot}_{dR}(Y/k)$$

est injectif.

Démonstration. On commence par considérer

$$Y_1 := \mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} X.$$

Le fibré $\mathcal{O}(-1)$ sur Y_1 est un sous-faisceau inversible de $\pi^*(\mathcal{E})$. (Dualement, le faisceau $\mathcal{O}(1)$ est par construction un faisceau quotient de $\pi^*\mathcal{E}^*$.)

De plus on sait par le théorème 10.9 que l'application $\pi^* : H^{\cdot}_{dR}(X/k) \to H^{\cdot}_{dR}(Y_1/k)$ est injective.

Soit $\mathcal{Q}$ le quotient $\pi^*\mathcal{E}/\mathcal{O}(-1)$ sur Y_1. C'est un faisceau localement libre (dual du noyau de l'application d'évaluation $Ker\,(\pi^*\mathcal{E}^* \to \mathcal{O}(1))$). De plus on a $rang\,\mathcal{Q} = rang\,\mathcal{E} - 1$. On peut donc raisonner par récurrence sur le rang, et construire la filtration voulue sur $\mathcal{Q}$ sur une variété $\pi' : Y \to Y_1$ dominant Y_1. Soit $\phi = \pi \circ \pi' : Y \to X$ le morphisme composé. Cette filtration se combine avec le début de filtration $\pi'^*\mathcal{O}(-1) \subset \phi^*\mathcal{E}$ pour donner la filtration voulue sur $\phi^*\mathcal{E}$. ■

Dans la pratique, le principe de scindage est utilisé à travers le corollaire suivant :

Corollaire 10.18 *Sous les mêmes hypothèses, soient $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \ldots, r := rang\,\mathcal{E}$ les faisceaux inversibles apparaissant comme gradués dans la filtration de $\phi^*\mathcal{E}$ sur Y. Alors, si car.$k = 0$, on a l'égalité suivante dans $H^{\cdot}_{dR}(Y/k)$:*

$$\phi^*c(\mathcal{E}) = c(\phi^*\mathcal{E}) = \prod_i c(\mathcal{L}_i),\ c(\mathcal{L}_i) = 1 + c_1(\mathcal{L}_i).$$

Démonstration. On utilise en effet la fonctorialité des classes de Chern (théorème 10.12), et la formule de Whitney sur Y.

■

Les $-c_1(\mathcal{L}_i)$ sont appelées les racines formelles du polynôme de Chern. Les "pull-back" à Y des classes de Chern de $\mathcal{E}$ sont les fonctions symétriques des $-c_1(\mathcal{L}_i)$ et inversement, tout polynôme symétrique en les $-c_1(\mathcal{L}_i)$, à coefficients dans k, est un polynôme en les $\phi^*c_j(\mathcal{E})$). En particulier il provient d'une classe sur X.

10.2.5 Cas des faisceaux cohérents

Supposons que X est lisse et projective. Alors les faisceaux cohérents $\mathcal{F}$ sur X admettent des résolutions à gauche finies localement libres :

$$0 \to \mathcal{F}_n \to \ldots \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F} \to 0, \tag{83}$$

où $n = dim\, X$.

On définit alors les classes de Chern $c_i(\mathcal{F})$ comme étant les termes de degré $2i$ de la classe de Chern totale $c(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$, soit

$$c(\mathcal{F}) = 1 + c_1(\mathcal{F}) + \ldots c_n(\mathcal{F}),$$

avec $c_i(\mathcal{F}) \in H^{2i}_{dR}(X_k)$. Les classes de Chern des $\mathcal{F}_i$ ont déjà été définies puisqu'ils sont localement libres, et la classe de Chern totale de $\mathcal{F}$ est définie par

$$c(\mathcal{F}) = \prod_i c(\mathcal{F}_i)^{\epsilon_i},$$

où $\epsilon_i = (-1)^i$, et l'inverse $c(\mathcal{F}_i)$ est défini formellement, sachant que $c(\mathcal{F}_i) = 1 + \alpha$, où α est un élément nilpotent de l'anneau commutatif $H^*_{dR}(X/k)$. (Notons en effet que comme $dim\, X = n$, on a $H^q(X, \mathcal{G}) = 0$ pour tout faisceau cohérent $\mathcal{G}$ sur X et tout $q > n = dim\, X$. La suite spectrale associée à la filtration de Hodge sur le complexe de de Rham montre alors que $H^l_{dR}(X/k) = 0$, $l > 2n$.)

Il reste à voir que cette définition est indépendante du choix de la résolution à gauche choisie. Cela résulte du fait que la formule

$$c(\mathcal{F}) = \prod_i c(\mathcal{F}_i)^{\epsilon_i}$$

est valide lorsque $\mathcal{F}$ est localement libre, ce qui est une conséquence immédiate de la formule de Whitney appliquée aux suites exactes courtes

$$0 \to Z_i \to \mathcal{F}_i \to Z_{i-1} \to 0$$

déduites de la résolution (83), (qui sont des suites exactes courtes de faisceaux cohérents localement libres).

Pour voir comment cela s'applique, soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent, et soit $\mathcal{E}.$ une résolution finie à gauche localement libre de $\mathcal{F}$. Donc $\mathcal{E}_0 \to \mathcal{F}$ est surjective, et le complexe $\mathcal{E}.$ est exact en degré $i > 0$. Soit maintenant $\mathcal{E}'_.$ une autre résolution finie localement libre de $\mathcal{F}$. On montrera plus loin le lemme 10.19 suivant :

Lemme 10.19 *Il existe deux suites exactes de complexes bornés de $\mathcal{O}_X$-modules libres*

$$0 \to \mathcal{G}. \to \mathcal{H}. \to \mathcal{E}. \to 0, \tag{84}$$

$$0 \to \mathcal{G}'_. \to \mathcal{H}. \to \mathcal{E}'_. \to 0, \tag{85}$$

où les complexes $\mathcal{G}.$ et $\mathcal{G}'_.$ sont exacts.

En admettant le lemme, on conclut de la manière suivante : On veut montrer que si on a une résolution à gauche finie localement libre $\mathcal{E}.$ de $\mathcal{F}$, la classe

$$\prod_i c(\mathcal{E}_i)^{\epsilon_i},\ \epsilon_i = (-1)^i,$$

est indépendante du choix de $\mathcal{E}.$. Si on on prend une seconde résolution $\mathcal{E}'_.$, on applique le lemme 10.19, qui nous fournit les suites exactes (84) et (85). Celles-ci fournissent à leur tour en appliquant la formule de Whitney à chacune des suites exactes courtes

$$0 \to \mathcal{G}_i \to \mathcal{H}_i \to \mathcal{E}_i \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{G}'_i \to \mathcal{H}_i \to \mathcal{E}'_i \to 0,$$

$$c(\mathcal{H}_i) = c(\mathcal{G}_i)c(\mathcal{E}_i),\ c(\mathcal{H}_i) = c(\mathcal{G}'_i)c(\mathcal{E}'_i),$$

d'où

$$\prod_i c(\mathcal{E}_i)^{\epsilon_i} = \prod_i c(\mathcal{H}_i)^{\epsilon_i} \prod_i c(\mathcal{G}_i)^{-\epsilon_i},$$

$$\prod_i c(\mathcal{E}'_i)^{\epsilon_i} = \prod_i c(\mathcal{H}_i)^{\epsilon_i} \prod_i c(\mathcal{G}'_i)^{-\epsilon_i}.$$

On utilise alors l'observation faite plus haut, que pour les complexes exacts bornés de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules libres $\mathcal{G}.$ et $\mathcal{G}'_.$, on a

$$1 = \prod_i c(\mathcal{G}_i)^{\epsilon_i},\ 1 = \prod_i c(\mathcal{G}'_i)^{\epsilon_i}.$$

■

Démonstration du lemme 10.19. Si on a un morphisme de complexes, surjectif sur chaque terme $\mathcal{E}. \to \mathcal{E}'_.$, compatibles avec les morphismes $\alpha : \mathcal{E}_0 \to \mathcal{F}$ et $\alpha' : \mathcal{E}'_0 \to \mathcal{F}$, le noyau $\mathcal{G}'_.$ est un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules libres qui est exact, vu que $\mathcal{E}.$ et $\mathcal{E}'_.$ sont quasi-isomorphes. Il suffit donc de poser $\mathcal{H}. = \mathcal{E}.$, $\mathcal{G}. = 0$ pour obtenir ce qu'on veut.

Dans le cas général, il suffit de trouver un complexe borné de $\mathcal{O}_X$-modules libres $\mathcal{H}.$ qui est une résolution à gauche de $\mathcal{F}$ et qui s'envoie surjectivement à la fois sur $\mathcal{E}.$ et sur $\mathcal{E}'_.$, de façon compatible avec les morphismes $\alpha : \mathcal{E}_0 \to \mathcal{F}$ et $\alpha' : \mathcal{E}'_0 \to \mathcal{F}$. En effet, les noyaux $\mathcal{G}.$ et $\mathcal{G}'_.$ seront des complexes exacts bornés de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules libres. Considérons le noyau $\mathcal{K}_0$ du morphisme

$$\mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}'_0 \to \mathcal{F},$$

$$(e, e') \mapsto \alpha(e) - \alpha'(e').$$

Ce noyau n'est pas nécessairement localement libre, mais comme les morphismes α et α' sont surjectifs, il s'envoie surjectivement sur $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}'_0$ via les projections, et par définition de $\mathcal{K}_0$, on a $\alpha \circ p_1 = \alpha' \circ p_2$.

Soit $\beta : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{K}_0$ un morphisme surjectif, avec $\mathcal{H}_0$ localement libre. Alors les flèches $p_i \circ \beta$ sont surjectives et satisfont

$$\alpha \circ p_1 \circ \beta = \alpha' \circ p_2 \circ \beta.$$

On construit ensuite $\mathcal{H}_i$ de la façon suivante : on veut que pour $i \geq 1$, $\mathcal{H}_i$ s'envoie surjectivement d'une part sur $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}'_i$ par des morphismes qu'on note β_i et β'_i, et d'autre part sur $Ker\,(d_{i-1} : \mathcal{H}_{i-1} \to \mathcal{H}_{i-2})$ par un morphisme qui fournira la différentielle $d_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_{i-1}$. On veut aussi que les morphismes

$$\beta_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{E}_i,\ \beta'_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{E}'_i$$

soient compatibles aux différentielles :

$$\beta_{i-1} \circ d_{i-1} = d^{\mathcal{E}}_{i-1} \circ \beta_i,\ \beta'_{i-1} \circ d_{i-1} = d^{\mathcal{E}'}_{i-1} \circ \beta'_i. \tag{86}$$

On définit

$$\mathcal{K}_i \subset \mathcal{E}_i \oplus \mathcal{E}'_i \oplus Ker\, d_{i-1}$$

comme le noyau de l'application

$$\mathcal{E}_i \oplus \mathcal{E}'_i \oplus Ker\, d_{i-1} \to \mathcal{E}_{i-1} \oplus \mathcal{E}'_{i-1},$$

$$(e, e', v) = (d^{\mathcal{E}}_i(e) - \beta_{i-1}(v),\ d^{\mathcal{E}'}_i(e) - \beta'_{i-1}(v)).$$

On vérifie que les trois projections sont surjectives, comme conséquence de l'exactitude de $\mathcal{E}.$ et $\mathcal{E}'_.$ en degré > 0 et des règles de compatibilité (86) pour $i - 2$. (Pour $i = 1$, et donc $i - 2 = -1$, on pose

$$\mathcal{H}_{-1} = \mathcal{E}_{-1} = \mathcal{E}'_{-1} = \mathcal{F}.)$$

Finalement, on choisit un morphisme surjectif

$$\mathcal{H}_i \to \mathcal{K}_i$$

avec $\mathcal{H}_i$ localement libre, et on définit β_i, β'_i, d_i comme les compositions de ce morphisme avec les différentes projections. ∎

Quatrième partie
Platitude et déformations

11 Eléments de théorie des déformations

11.1 Foncteurs de déformations

Soit X une variété projective définie sur k. Il existe différents foncteurs de déformations de X. Le principal problème consiste à décider si on veut déformer X comme variété projective ou si on veut aussi étudier des déformations plus générales (par exemple $k = \mathbb{C}$ et on veut étudier toutes les petites déformations de la structure complexe).

Dans ce cadre de déformations plus générales, on arrive vite à des problèmes majeurs, qui sont les suivants :

Supposons $k = \mathbb{C}$. Alors certaines variétés algébriques complexes admettent des déformations qui ne sont plus du tout algébriques, c'est-à-dire que la déformation de la structure complexe fait disparaître le fibré en droites holomorphe dont les sections permettaient de plonger X dans un espace projectif. L'exemple-type est donné par les déformations des tores complexes ou des surfaces $K3$: les surfaces $K3$ projectives sont paramétrées par une union dénombrable d'hypersurfaces dans l'espace des déformations des surfaces $K3$ comme variétés complexes. De même, les déformations d'un tore complexe projectif (une "variété abélienne") de dimension g forment localement une sous-variété de dimension $\frac{g(g+1)}{2}$ de l'espace des déformations du tore, qui est de dimension g^2.

Cependant, il n'y a pas de bon espace de déformations pour les variétés complexes, même kählériennes, même si, comme dans les exemples mentionnés ci-dessus, il existe une bonne famille universelle locale de déformations. L'un des paradoxes rencontrés ici est qu'à un ordre fini, on peut étudier dans un cadre algébrique les déformations non algébriques d'une variété algébrique.

Le problème qu'on rencontre est le suivant : le foncteur de déformations est un foncteur $\mathcal{F}_X$ qui va de la catégorie des k-schémas pointés $(B, 0)$ vers la catégorie des ensembles, et qui à $(B, 0)$ associe les classes d'isomorphisme (au-dessus de B) de k-schémas $\pi : \mathcal{X} \to B$ plats et propres au-dessus de B, munis d'un isomorphisme $\mathcal{X}_0 := \pi^{-1}(0) \cong X$.

On aimerait pouvoir "représenter" ce foncteur, c'est-à-dire trouver un objet universel $(\mathcal{M}, 0)$ tel que l'ensemble $\mathcal{F}_X(B, 0)$ s'identifie aux morphismes d'objets pointés $(B, 0) \to (\mathcal{M}, 0)$.

Malheureusement, la question est de savoir dans quelle catégorie il faut choisir $\mathcal{M}$. L'exemple ci-dessus des surfaces $K3$ montre qu'on peut avoir une très bonne théorie formelle (c'est-à-dire limite des ordres finis) sans disposer d'objet global, la raison étant qu'à l'ordre fini ou formel, on peut rester dans la théorie des k-schémas, tandis que si on veut vraiment étudier des déformations, on doit passer par exemple dans la catégorie des variétés complexes.

Le plus prudent compte tenu de ces pathologies consiste à étudier les déformations formelles ou même à l'ordre fini, sur des bases artiniennes. On peut dans ce cas sous certaines réserves construire des schémas formels qui représentent le foncteur de déformations.

Les problèmes que l'on rencontre ne sont pas par ailleurs spécifiques du fait qu'il existe des déformations non algébriques. Ils apparaissent déjà lorsqu'on veut étudier les déformations des variétés sans spécifier une "polarisation" (un faisceau inversible ample). Ces problèmes sont principalement liés à l'absence de contrôle sur les groupes d'automorphismes des variétés non polarisées.

L'alternative consiste donc à n'étudier que les déformations projectives. On dispose alors de la théorie du schéma de Hilbert, où les problèmes de représentabilité sont tous résolus, et qui permet de paramétrer les déformations par une base projective. Cependant on regarde ici un foncteur différent, qui étudie les déformations de variétés plongées dans l'espace projectif. En quotientant ensuite par l'action du groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^N$, on peut obtenir des "espaces de modules" qui paramètrent le choix d'une variété X et d'un fibré en droites très ample sur X. On renvoie à [8], [11] pour une telle étude.

Dans un premier temps, on va se contenter d'étudier le foncteur de déformations formelles, qui est un foncteur défini sur la catégorie des schémas artiniens locaux (un point muni d'un anneau structurel artinien local) et qui à B associe l'ensemble des classes d'isomorphisme au-dessus de B de k-schémas $\mathcal{X} \to B$ plats et propres au-dessus de B, munis d'un isomorphisme $\mathcal{X}_0 \cong X$.

Le cadre des schémas artiniens locaux est vraiment la cadre naturel pour faire de la théorie des déformations. Moralement, on est en train d'étudier les voisinages infinitésimaux de 0 dans un espace de déformations $\mathcal{M}$ qui n'existe pas en général comme k-schéma.

On va faire ci-dessous une étude plus grossière qui consiste à étudier les arcs à l'ordre fini dans cet espace $\mathcal{M}$, ce qui veut dire qu'au lieu de décrire tous les k-schémas $\mathcal{X} \to B$ plats et propres au-dessus de B, avec $B = Spec\, A$, $A =$ anneau artinien local de corps résiduel k, on va se contenter de regarder les déformations d'ordre n

$$X_n \to \Delta_n,$$

$\Delta_n = Spec\, k[t]/t^{n+1}$. On va donc décrire les déformations du premier ordre ($n = 1$), ce qui est moralement l'espace tangent de Zariski de $\mathcal{M}$ en 0, puis les obstructions à étendre les arcs à un ordre supérieur, ce qui revient à étudier grossièrement la singularité de $\mathcal{M}$ en 0. On traitera le cas où X est lisse, puis on dira un mot sur le cas général.

11.2 Classe de Kodaira-Spencer

X étant une k-variété projective et lisse, on considère les déformations du premier ordre de X, c'est-à-dire les morphismes propres et plats

$$\pi : X_1 \to \Delta_1$$

de fibre centrale isomorphe à X. L'anneau de fonctions de Δ_1 étant $k[t]/t^2$, la fonction $\pi^* t$, qu'on notera encore t, engendre l'idéal de la fibre centrale, X_0, et comme le noyau de $t : \mathcal{O}_{\Delta_1} \to \mathcal{O}_{\Delta_1}$ est égal à $k = k[t]/t = \mathcal{O}_0$, la platitude entraîne que le noyau de $t : \mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{O}_{X_1}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{X_0}$. Le faisceau structurel $\mathcal{O}_{X_1}$ s'inscrit donc dans une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{X_0} \xrightarrow{t} \mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{O}_{X_0} \to 0. \tag{87}$$

Etant donné un tel morphisme, on note tout d'abord que $\Omega_{X_1|X_0}$ est localement libre sur la fibre centrale X_0. Ici les faisceaux de différentielles sont les faisceaux de différentielles de Kähler par rapport à k. En effet, on utilise la suite exacte (87) et le lemme 7.15 décrivant la fibre de $\Omega_{X_1/k}$ en un point $x \in X_1 = X_0$:

$$\Omega_{X_1/k|x} \cong \mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2.$$

Cela entraîne immédiatement qu'on a une injection de $\mathcal{O}_{X_0}$ dans $\Omega_{X_1|X_0}$, donnée par la multiplication par dt, et la suite exacte de différentielles de Kähler (c'est la suite exacte conormale de X_0 dans X_1) :

$$0 \to \pi^*\Omega_{\Delta_1|0} \to \Omega_{X_1|X_0} \xrightarrow{r} \Omega_{X_0} \to 0. \tag{88}$$

X_0 étant lisse, le faisceau $\Omega_{X_0/k}$ est localement libre sur X_0, et la suite exacte 88 montre que $\Omega_{X_1|X_0}$ est localement libre sur X_0.

De même $\Omega_{\Delta_1|0}$ est localement libre engendré par dt. En effet, Ω_{Δ_1} est engendré par dt, avec la relation $2tdt = 0$. Son pull-back $\pi^*\Omega_{\Delta_1|0}$ est donc le fibré trivial sur X_0, de générateur dt.

La suite exacte (88) fournit donc une extension de Ω_X par le fibré trivial $\mathcal{O}_X dt$. Comme X est lisse ces extensions sont paramétrées par

$$Ext^1(\Omega_X, \mathcal{O}_X) \cong H^1(X, T_X).$$

En effet, la classe d'extension e associée à (88) est obtenue en dualisant (88), ce qui donne

$$0 \to T_X \to (\pi^* \Omega_{\Delta_1|0})^* \to \mathcal{O}_X \frac{\partial}{\partial t} \to 0,$$

et la suite exacte longue de cohomologie fournit alors

$$\delta : H^0(X, \mathcal{O}_X \frac{\partial}{\partial t}) = k \to H^1(X, T_X).$$

Inversement, soit $e \in H^1(X, T_X)$. On construit un faisceau localement libre $\mathcal{F}^*$ sur X et une suite exacte :

$$0 \to T_X \to \mathcal{F}^* \to \mathcal{O}_X \to 0$$

de la manière suivante : Choisissons pour un recouvrement affine de X par des ouverts U_i, une représentation de e par un 1-cocycle de Čech à valeur dans T_X, soit $e_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, T_X)$. Le faisceau $\mathcal{F}^*$ sera défini comme $\mathcal{F}^* = T_X \oplus \mathcal{O}_X$ sur U_i, avec fonctions de transition

$$\Gamma_{ij}(t, \alpha) = (t + \alpha e_{ij}, \alpha)$$

sur U_{ij}. La condition de cocycle $e_{ij} + e_{jk} + e_{kl} = 0$ garantit que $\Gamma_{ij} \circ \Gamma_{jk} \circ \Gamma_{ki} = Id$ sur U_{ijk}, garantissant que la définition de F est cohérente.

Théorème 11.1 *L'application qui à X_1 associe la classe d'extension e définit une bijection entre l'ensemble des déformations du premier ordre de X et l'espace $H^1(X, T_X)$.*

Démonstration. Il est standard que la classe e détermine l'extension (88) (cf [12]). Montrons comment l'extension (88) qui détermine un fibré $\mathcal{F}$ sur X s'inscrivant dans une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{F} \xrightarrow{r} \Omega_X \to 0, \tag{89}$$

permet de reconstruire un schéma X_1, muni d'un morphisme dans Δ_1, avec fibre centrale $X_0 \cong X$, et tel que $\mathcal{F} \cong \Omega_{X_1|X_0}$.

Il faut voir que X_1 n'est rien d'autre que X avec un faisceau de fonctions étendu par des nilpotents (la fonction t). Il suffit donc de construire le faisceau d'algèbres $\mathcal{O}_{X_1}$ sur X, qui doit entrer dans la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{t} \mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{O}_X \to 0,$$

où la flèche de droite est la restriction de X_1 à $X = X_0$, et la flèche de gauche est l'inclusion de $\mathcal{I}_{X_0} \cong \mathcal{O}_X t$ dans $\mathcal{O}_{X_1}$. On dispose de la différentielle $d : \mathcal{O}_X \to \Omega_X$ et de la restriction $r : \mathcal{F} \to \Omega_X$. On va définir $\mathcal{O}_{X_1}$ comme un produit fibré à partir de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{O}_{X_1} := \{(\alpha, f) \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{O}_X,\, r(\alpha) = df\}. \tag{90}$$

Pour conclure, il suffit de décrire la structure de k-algèbre sur $\mathcal{O}_{X_1}$. Cette structure est dictée par la règle de Leibniz. On veut en effet que la flèche

$$\mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{F} \cong \Omega_{X_1|X}$$

$$(\alpha, f) \mapsto \alpha$$

soit la différentielle de $\mathcal{O}_{X_1}$ composée avec la restriction à X. On doit donc avoir

$$(\alpha, f)(\beta, g) = (\alpha g + \beta f, fg). \tag{91}$$

La formule ci-dessus décrit une structure de k-algèbre commutative sur le faisceau $\mathcal{O}_{X_1}$ décrit par la formule (90), pour laquelle le morphisme $\mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{O}_X$, $(\alpha, f) \mapsto f$ est un morphisme surjectif de k-algèbres, dont le noyau est isomorphe à

$$Ker\,(r : \mathcal{F} \to \Omega_X),$$

qui est aussi isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ d'après (89). De plus ce noyau est un idéal de carré nul d'après la formule (91). ■

Définition 11.2 *La classe $e \in H^1(X, T_X)$ associée à une déformation du premier ordre $X_1 \to \Delta_1$ de X est appelée la classe de Kodaira-Spencer de la déformation.*

11.2.1 Cas général

Dans les arguments ci-dessus, on n'a pas utilisé l'hypothèse que X était lisse, sauf pour identifier $Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ et $H^1(X, T_X)$. La seule chose qui est utilisée est le fait suivant :

Lemme 11.3 *On a une identification de $Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ avec l'ensemble des extensions $\mathcal{F}$ de Ω_X par $\mathcal{O}_X$.*

Un tel fibré $\mathcal{F}$ s'inscrivant dans une suite exacte (89) fournit alors une déformation X_1 de X par la formule (90).

Démonstration du lemme 11.3. Soit $e \in Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$, Il existe un faisceau localement libre $\mathcal{H}$, et une surjection

$$\mathcal{H} \to \Omega_{X/k}$$

de noyau $\mathcal{G}$. On peut prendre pour $\mathcal{H}$ un faisceau de la forme $\mathcal{O}_X(-l)^N$, avec l et N suffisamment grands. Alors on a $Ext^1(\mathcal{H}, \mathcal{O}_X) = H^1(X, \mathcal{H}^*) = 0$ par le théorème d'annulation de Serre 2.40, et la suite exacte longue des Ext fournit une surjection

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{O}_X) \to Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X).$$

Soit $f \in Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{O}_X)$ s'envoyant sur e, et définissons $\mathcal{F}$ par la formule :

$$\mathcal{F} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{H}/Im\,(f, i),$$

où i est l'injection de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$, de sorte que (f, i) est une injection de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{H}$. On vérifie immédiatement que le faisceau $\mathcal{F}$ ainsi défini est un faisceau cohérent sur X, qui est une extension de Ω_X par $\mathcal{O}_X$, dont la classe d'extension est e. ■

11.3 Obstructions : Le “principe de relèvement T^1”

Soit $\pi : X_n \to \Delta_n$ un morphisme plat et propre. On supposera pour simplifier que la fibre centrale X_0 est lisse. Comme précédemment, $\Delta_n := Spec\, k[t]/t^{n+1}$ mais on supposera que le corps k est de caractéristique 0.

On montre tout d'abord :

Lemme 11.4 *Le faisceau $\Omega_{X_n|X_{n-1}}$ est localement libre sur X_{n-1}, le faisceau des différentielles relatives Ω_{X_n/Δ_n} est localement libre sur X_n, et on a la suite exacte des différentielles relatives*

$$0 \to \mathcal{O}_{X_{n-1}}dt \to \Omega_{X_n|X_{n-1}} \to (\Omega_{X_n/\Delta_n})_{|X_{n-1}} \to 0. \tag{92}$$

Démonstration. Dans le cas où $X_n = \Delta_n$, cela résulte du fait que, par définition, le faisceau Ω_{Δ_n} est engendré sur $\mathcal{O}_{\Delta_n}$ par dt avec la relation $t^n dt = 0$. Donc par restriction à Δ_{n-1} il devient libre de générateur dt. Dans le cas général, considérons un point fermé $x \in X_0$ qu'on supposera pour simplifier défini sur k. Comme X est lisse, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ admet un système de paramètres locaux $g_1, \ldots, g_d$, $d = dim\, X$, qui satisfont

$$g_i \in \mathcal{M}_x,\ \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong k[[g_1, \ldots, g_d]],$$

où l'anneau $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est le complété formel de $\mathcal{O}_{X,x}$ le long de son idéal maximal $\mathcal{M}_x$. On a une surjection d'anneaux locaux

$$\mathcal{O}_{X_n,x} \to \mathcal{O}_{X,x},$$

et on peut donc choisir des relèvements

$$\tilde{g}_i \in \mathcal{O}_{X_n,x},\ \tilde{g}_{i|X} = g_i.$$

On dispose par ailleurs sur X_n de la fonction t, qui satisfait $t^{n+1} = 0$, et la platitude de π fournit une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{X_{n-1}} \xrightarrow{t} \mathcal{O}_{X_n} \to \mathcal{O}_X \to 0,$$

correspondant à la suite exacte analogue sur Δ_n.

On a un morphisme naturel

$$k[[\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_d, t]]/(t^{n+1}) \to \widehat{\mathcal{O}}_{X_n,x},$$

et on montre à l'aide de la suite exacte ci-dessus et par récurrence sur n, que ce morphisme est un isomorphisme.

On en déduit immédiatement les énoncés concernant les différentielles, puisqu'on a une présentation du complété formel $\widehat{\Omega_{X_n,x}}$ comme le quotient du $\widehat{O}_{X_n,x}$-module libre

$$\widehat{O}_{X_n,x} < d\tilde{g}_1, \ldots, d\tilde{g}_d, dt >$$

par la relation $t^n dt = 0$. ∎

Notant π_{n-1} la restriction de π à $X_{n-1} := \pi^{-1}(\Delta_{n-1})$, on a l'application de Kodaira-Spencer de X_n, qui donne une classe

$$\alpha_{n-1} \in H^1(X_{n-1}, T_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}),$$

et qui est définie comme la classe d'extension de la suite exacte (92). Ici, le faisceau tangent relatif est le faisceau localement libre défini comme le dual de $\Omega_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}$, et on utilise l'identité

$$Ext^1_{\mathcal{O}_{X_{n-1}}}(\Omega_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}, \mathcal{O}_{X_{n-1}}) \cong H^1(X_{n-1}, T_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}),$$

due au fait que $\Omega_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}$ est localement libre sur X_{n-1} (cf preuve du corollaire 9.6).

Notons que $(\Omega_{X_n/\Delta_n})_{|X_{n-1}}$ est naturellement isomorphe à $\Omega_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}$; en particulier, la restriction de Ω_{X_n/Δ_n} à la fibre centrale $X_0 \cong X$ est isomorphe à $\Omega_{X/k} = \Omega_X$.

On désire étendre la déformation $X_n \to \Delta_n$ d'ordre n de X_0 à l'ordre $n+1$, c'est-à-dire construire un schéma

$$\pi' : X_{n+1} \to \Delta_{n+1}$$

plat et propre au-dessus de Δ_{n+1}, tel que

$$\pi'^{-1}(\Delta_n) \cong X_n,$$

et qu'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_n & \hookrightarrow & X_{n+1} \\ \pi \downarrow & & \pi' \downarrow \\ \Delta_n & \hookrightarrow & \Delta_{n+1} \end{array}.$$

On rencontre en général des obstructions non triviales (qui sont dans $H^2(X, T_X)$, voir ci-dessous), et qui moralement reflètent le fait que la base de la déformation universelle peut être singulière. (On peut penser à la déformation $X_n \to \Delta_n$ comme à un morphisme défini sur Δ_n et à valeurs dans un schéma de déformations (inexistant en général) et la possibilité ou non d'étendre ce jet à l'ordre $n+1$ traduit la présence de singularités de ce schéma.)

Le principe de relèvement T^1 est une sorte de linéarisation du problème qui peut s'énoncer de la façon suivante :

Théorème 11.5 *L'obstruction à étendre π en une déformation à l'ordre $n+1$*

$$\pi' : X_{n+1} \to \Delta_{n+1}$$

est égale à l'obstruction à étendre la classe de Kodaira-Spencer

$$\alpha_{n-1} \in H^1(X_{n-1}, T_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}})$$

en une classe

$$\alpha_n \in H^1(X_n, T_{X_n/\Delta_n}),$$

(où comme précédemment T_{X_n/Δ_n} est le faisceau localement libre sur X_n défini comme le dual de $\Omega X_n/\Delta_n$).

Corollaire 11.6 *Cette obstruction vit dans $H^2(X, T_X)$.*

Démonstration. Le faisceau T_{X_n/Δ_n} étant localement libre sur X_n, on a la suite exacte :
$$0 \to T_X \stackrel{t^n}{\to} T_{X_n/\Delta_n} \to T_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}} \to 0.$$
La suite exacte longue de cohomologie associée fournit
$$H^1(X_n, T_{X_n/\Delta_n}) \to H^1(X_{n-1}, T_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}) \stackrel{\delta}{\to} H^2(X, T_X),$$
ce qui montre, combiné avec le théorème 11.5, que l'obstruction cherchée est égale à $\delta(\kappa) \in H^2(X, T_X)$. ■

La principale étape de la preuve du théorème 11.5 est le lemme suivant, qui généralise la construction faite dans la preuve du théorème 11.1 :

Lemme 11.7 *Le schéma X_n est déterminé par X_{n-1}, et par la donnée du faisceau de $\mathcal{O}_{X_{n-1}}$-modules libres $\Omega_{X_n|X_{n-1}}$ et de l'application de restriction qu'on notera r :*
$$r : \Omega_{X_n|X_{n-1}} \to \Omega_{X_{n-1}}$$
(dont le noyau est isomorphe à $\mathcal{O}_X$, de générateur $t^{n-1}dt$).

De plus, la paire $(\Omega_{X_n|X_{n-1}}, r)$ est seulement assujettie à la condition que la restriction de r à X_{n-2} induit un isomorphisme :
$$r : \Omega_{X_n|X_{n-2}} \to \Omega_{X_{n-1}|X_{n-2}}.$$

Démonstration. En effet, considérons l'application
$$\mu : \mathcal{O}_{X_n} \to \mathcal{O}_{X_{n-1}} \oplus \Omega_{X_n|X_{n-1}}$$
définie par
$$\mu(f) = (f_{|X_{n-1}}, df_{|X_{n-1}}).$$
(Ici on note un peu abusivement $df_{|X_{n-1}}$ l'image de $df \in \Omega_{X_n}$ dans $\Omega_{X_n|X_{n-1}}$.)

Lemme 11.8 *μ est injective et l'image $Im\,\mu \cong \mathcal{O}_{X_n}$ est exactement décrite de la manière suivante :*
$$Im\,\mu = A := \{(g, \alpha) \in \mathcal{O}_{X_{n-1}} \oplus \Omega_{X_n|X_{n-1}},\ dg = r(\alpha)\}. \tag{93}$$

Démonstration. Pour l'injectivité, si $g \in Ker\,\mu$, on a $g_{|X_{n-1}} = 0$ et donc $g = ht^n$, pour une fonction $h \in \mathcal{O}_X$. Alors
$$dg = nht^{n-1}dt \ mod.\ t^n,$$
et comme on est en caractéristique 0, ceci ne peut s'annuler dans $\Omega_{X_n|X_{n-1}}$ que si $h = 0$, d'après le lemme 11.4.

Surjectivité : Clairement l'image de μ est contenue dans A, et pour voir qu'on a l'égalité, on prend $(g, \alpha) \in A$, et on cherche f avec
$$f_{|X_{n-1}} = g,\ df_{|X_{n-1}} = \alpha. \tag{94}$$
Prenons d'abord une $\tilde{f}$ satisfaisant la première condition. Alors le f doit être de la forme
$$f = \tilde{f} + t^n h,$$

pour une fonction $h \in \mathcal{O}_X$. On veut f telle que $df_{|X_{n-1}} = \alpha$, et on sait que $r(\alpha) = dg$.

Comme $\tilde{f}_{|X_{n-1}} = g$ et $r(\alpha) = dg$, on a

$$r(d\tilde{f}_{|X_{n-1}} - \alpha) = 0.$$

Or le noyau de r est engendré par $t^{n-1}dt$. On a donc

$$d\tilde{f}_{|X_{n-1}} - \alpha = nht^{n-1}dt,$$

pour une certaine fonction $h \in \mathcal{O}_X$. Donc $f := \tilde{f} - ht^n$ satisfait la condition (94) voulue. ■

Revenant à la preuve du lemme 11.7, il faut noter pour conclure que la structure d'anneau sur $\mathcal{O}_{X_n} \cong A$ est donnée (à l'aide de la règle de Leibniz) par

$$(g, \alpha) \cdot (g', \alpha') = (fg, f\alpha' + g'\alpha).$$

On vérifie que c'est bien un anneau plat sur $\mathcal{O}_{\Delta_n}$, et en utilisant (93), qu'on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X \stackrel{t^n}{\to} A \to \mathcal{O}_{X_{n-1}} \to 0.$$

■

Le lemme 11.7 nous donne donc une recette pour reconstruire X_n à partir de la donnée de X_{n-1} et de $\Omega_{X_n|X_{n-1}}$, muni de $r : \Omega_{X_n|X_{n-1}} \to \Omega_{X_{n-1}}$, qu'on va en fait appliquer pour construire l'extension X_{n+1}.

Preuve du théorème 11.5. Supposons donné $X_n \to \Delta_n$. On a le faisceau cotangent relatif Ω_{X_n/Δ_n} qui est localement libre par le lemme 11.4, et de plus on a Ω_{X_n} qui n'est pas localement libre, mais le devient après restriction à X_{n-1}, (cf lemme 11.4). On a l'application de Kodaira-Spencer de X_n, qui donne une classe

$$\alpha_{n-1} \in H^1(X_{n-1}, T_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}).$$

Supposons qu'on arrive à étendre cette classe en $\alpha_n \in H^1(X_n, T_{X_n/\Delta_n})$. Alors α_n fournit un faisceau localement libre $\mathcal{E}$ sur X_n, qui est une extension

$$0 \to \mathcal{O}_{X_n} \to \mathcal{E} \to \Omega_{X_n/\Delta_n} \to 0. \tag{95}$$

De plus on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{E}_{|X_{n-1}} = \Omega_{X_n|X_{n-1}}, \tag{96}$$

puisque α_n étend α_{n-1}.

Pour construire X_{n+1}, d'après le lemme 11.7 et sa conclusion, il suffit de pouvoir poser

$$\mathcal{E} = \Omega_{X_{n+1}|X_n},$$

et de connaître r. En d'autres termes, il suffit de savoir qu'il existe $r : \mathcal{E} \to \Omega_{X_n}$, telle que la restriction de r à X_{n-1} soit l'identité, compte tenu de l'identification (96).

Or $\mathcal{E}$ admet deux flèches : l'une qu'on notera

$$f_1 : \mathcal{E} \to \Omega_{X_n/\Delta_n},$$

donnée par la suite exacte (95), l'autre qu'on notera

$$f_2 : \mathcal{E} \to \Omega_{X_n|X_{n-1}},$$

donnée par l'isomorphisme $\mathcal{E}_{|X_{n-1}} \cong \Omega_{X_n|X_{n-1}}$. Ces deux flèches sont compatibles au sens où l'on a

$$g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2 : \mathcal{E} \to \Omega_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}, \tag{97}$$

où

$$g_1 : \Omega_{X_n/\Delta_n} \to \Omega_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}$$

et

$$g_2 : \Omega_{X_n|X_{n-1}} \to \Omega_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}$$

sont les flèches naturelles.

Pour conclure il suffit donc de montrer :

Lemme 11.9 *On a une identification naturelle*

$$\Omega_{X_n} \cong B \subset \Omega_{X_n/\Delta_n} \oplus \Omega_{X_n|X_{n-1}},$$

$$B := \{(\alpha, \beta),\, g_1(\alpha) = g_2(\beta)\}.$$

En effet, le lemme 11.9 combiné avec (97) montre que (f_1, f_2) fournit l'application $r : \mathcal{E} \to \Omega_{X_n}$ désirée. Le lemme 11.7 conclut alors la preuve du théorème 11.5. ∎

Preuve du Lemme 11.9.

Injectivité : Soit $\eta \in \Omega_{X_n}$, s'envoyant sur 0 par les restrictions naturelles dans $\Omega_{X_n/\Delta_n} \oplus \Omega_{X_n|X_{n-1}}$. La condition que η s'annule dans Ω_{X_n/Δ_n} dit que $\eta = hdt$. Alors comme η s'annule dans $\Omega_{X_n|X_{n-1}}$ on trouve que t^n divise h. Or dans Ω_{X_n}, on a déjà $t^n dt = 0$.

Surjectivité : Soit $(\alpha, \beta) \in B$. Il existe (localement, tout est local ici) $\gamma \in \Omega_{X_n}$ telle que l'image de γ dans Ω_{X_n/Δ_n} soit égale à α. On peut modifier γ par une différentielle de la forme hdt. Soit γ' l'image de γ dans $\Omega_{X_n|X_{n-1}}$. Alors on a

$$g_2(\gamma') = g_1(\alpha) = g_2(\beta)$$

puisque $(\alpha, \beta) \in B$. On en déduit que

$$g_2(\gamma' - \beta) = 0,$$

ce qui équivaut à $\gamma' - \beta = hdt$, où h est une fonction sur X_{n-1}. En corrigeant γ par hdt, on trouve donc un $\tilde{\gamma} \in \Omega_{X_n}$ qui s'envoie sur (α, β).

∎

12 Platitude

12.1 Modules plats sur un anneau

Rappelons qu'un module M sur un anneau commutatif unitaire A est dit plat si le foncteur $N \mapsto M \otimes_A N$ est exact sur la catégorie des A-modules. (Ce foncteur est toujours exact à droite, et donc c'est l'exactitude à gauche qui est demandée ici.) Une caractérisation équivalente fait intervenir les Tor (cf [7]) :

Lemme 12.1 *M est plat sur A si et seulement si pour tout A-module N, et pour tout $i > 0$, on a :*

$$Tor_i^A(M, N) = 0.$$

Rappelons que les $Tor_i^A(N, R)$ sont calculés comme les groupes d'homologie du complexe

$$N_{i+1} \otimes R \to N_i \otimes R \to N_{i-1} \otimes R \to ...,$$

avec

$$N_{i+1} \to N_i \to \dots N_0 \to N \to 0$$

une résolution projective à gauche de N. On a le lemme suivant :

Lemme 12.2 *Si A est local Noetherien d'idéal maximal $\mathcal{M}$ et M est de type fini, alors M est plat sur A si et seulement si M est libre sur A.*

Démonstration. C'est évidemment une condition suffisante. Inversement, si M est plat, soient $m_1, \dots, m_r \in M$ tels que les m_i modulo $\mathcal{M}M$ fournissent une base de $M/\mathcal{M}M = M \otimes k$, où $k = A/\mathcal{M}$ est le corps résiduel de A.

Le lemme de Nakayama entraîne alors que l'application

$$A^r \to M,\ (a_1, \dots, a_r) \mapsto \sum_i a_i m_i$$

est surjective. Soit R son noyau. On a la suite exacte

$$0 \to R \to A^r \to M \to 0.$$

Comme M est plat, cette suite reste exacte après tensorisation par k, comme le montrent la suite exacte longue des Tor et le fait que $Tor_1^A(M, k) = 0$. Mais par définition des m_i, la flèche induite $A^r \otimes k \to M \otimes k$ est un isomorphisme. Il en résulte que $R \otimes k = 0$ et donc $R = 0$ par Nakayama, vu que R est de type fini. ■

Une propriété essentielle des modules plats est la suivante :

Proposition 12.3 *Soit*

$$0 \to M_0 \to M_1 \to \dots \to M_n \to 0$$

un complexe exact de A-modules, avec M_i plat pour $i > 0$. Alors M_0 est plat.

Démonstration. En scindant le complexe ci-dessus en suites exactes courtes, il suffit de prouver que si

$$0 \to R \to P \to Q \to 0$$

est une suite exacte de A-modules, avec P et Q plats, alors R l'est.

Il suffit pour cela d'après le lemme 12.1 de montrer que $Tor_i^A(E, R) = 0$, $i > 0$ pour tout A-module E.

Or on a la suite exacte des Tor :

$$Tor_{i+1}^A(E, Q) \to Tor_i^A(E, R) \to Tor_i^A(E, P) \to \dots$$

qui montre que $Tor_{i+1}^A(E, Q) = 0$ et $Tor_i^A(E, P) = 0$, $i > 0$ entraînent $Tor_i^A(E, R) = 0$, $i > 0$. ■

12.2 Modules gradués et polynôme de Hilbert

Soit k un corps, et soit $M^{\cdot} = \oplus M^l$ un module gradué de type fini sur l'anneau gradué $k[X_1, \ldots, X_n]$. En particulier, chaque M^i est de rang fini sur k.

Théorème 12.4 *Il existe un polynôme P_M à coefficients rationnels, ayant la propriété que*

$$P_M(l) = dim_k M^l,$$

pour l entier suffisamment grand.

Démonstration. Par récurrence sur n. Considérons la multiplication par X_n

$$X_n : M^{\cdot} \to M^{\cdot+1}.$$

Soit $K^{\cdot}$ son noyau et $Q^{\cdot+1}$ son conoyau. Ce sont des $k[X_1, \ldots, X_{n-1}]$-modules gradués de type fini. Il existe donc P_K et P_Q tels que

$$P_K(l) = dim_k K_l,\ P_Q(l) = dim_k Q_l,\ l >> 0.$$

On a alors :

$$dim_k M^{l+1} - dim_k M^l = P_Q(l+1) - P_K(l),\ l >> 0,$$

ce qui entraîne immédiatement le résultat. ■

On a en vue le cas où $X \subset \mathbb{P}^n_k$ est un k-schéma projectif, et $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X. On sait alors que $\oplus_{l \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(l))$ est d'engendrement fini sur $k[X_0, \ldots, X_n]$. Le polynôme de Hilbert de ce module gradué est alors appelé polynôme de Hilbert de $\mathcal{F}$.

12.3 Faisceaux plats au-dessus d'une base

La situation est la suivante : on considère un k-schéma quasi-projectif X, un k-schéma quasi-projectif B, et un morphisme projectif

$$\pi : X \to B.$$

Rappelons que le morphisme π est projectif, s'il existe une factorisation de π

$$X \to B \times_k \mathbb{P}^N \to B,$$

où la première flèche est un plongement et la seconde est la première projection. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X.

Définition 12.5 *Le faisceau $\mathcal{F}$ est plat sur B si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\pi^{-1}\mathcal{O}_B$-modules plat. En d'autres termes, les germes $\mathcal{F}_x$, $x \in X$ sont plats sur les anneaux locaux $\mathcal{O}_{B,y}$, $y = \pi(x)$. Cela entraîne aussi que si $y \in B$, et U est un ouvert affine de X dont l'image par π est contenue dans un ouvert affine V de B contenant y, le localisé en y de $\mathcal{F}(U)$ comme $\mathcal{O}_V$-module est plat sur $\mathcal{O}_{B,y}$.*

La structure de $\pi^{-1}\mathcal{O}_B$-modules provient de la structure de $\mathcal{O}_X$-modules via l'application $\pi^* : \pi^{-1}\mathcal{O}_B \to \mathcal{O}_X$. Cependant $\mathcal{F}$ peut très bien être plat sur B sans être plat sur X.

En général, $\mathcal{F}$ ne sera pas de type fini sur B, car cela impliquerait que le support de $\mathcal{F}$ est à fibre finie au-dessus de B. L'hypothèse de projectivité va permettre néanmoins de donner une caractérisation des faisceaux plats faisant recours au lemme 12.2.

On a le résultat suivant (c'est la version relative des théorèmes 2.46 et 2.40, qui se montre avec des arguments identiques) :

Théorème 12.6 *Soit $\pi : X \to B$ un morphisme projectif et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Soit $\mathcal{O}_X(1)$ un faisceau relativement très ample sur X, c'est-à-dire la restriction à $X \subset B \times_k \mathbb{P}^N$ de $pr_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ pour un plongement relatif adéquat de X.*

Alors les faisceaux $R^i\pi_*\mathcal{F}(l)$, $l \in \mathbb{Z}$ sont cohérents sur B. De plus ils sont nuls pour $l >> 0$.

On va utiliser maintenant ces résultats pour donner la caractérisation suivante des faisceaux plats à support projectif sur une base B.

Théorème 12.7 *Soient X et B des k-schémas quasi-projectifs et soient $\pi : X \to B$ un morphisme projectif et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors $\mathcal{F}$ est plat sur B si et seulement si, pour $l >> 0$, $R^0\pi_*\mathcal{F}(l)$ est localement libre sur B.*

Démonstration. Le résultat est local sur B, qu'on peut donc supposer affine, soit $B = Spec\,A$. Soit alors $\mathcal{U} = (U_i)$ un recouvrement affine fini de X et soit $\check{C}^{\cdot}(\mathcal{U}, \mathcal{F}(l))$ le complexe de Čech de $\mathcal{F}(l)$ relativement à $\mathcal{U}$, qu'on voit comme un complexe de A-modules. Soit $\mu \in Spec\,A$ un idéal premier. Par platitude de $\mathcal{F}$ sur B, les localisés $\check{C}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F}(l))_\mu$ en μ des termes du complexe de Čech

$$\check{C}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F}(l)) = \oplus_{|I|=r+1}\Gamma(U_I, \mathcal{F}(l)) \tag{98}$$

sont plats sur A_μ. Par ailleurs, pour $l >> 0$, le complexe $\check{C}^{\cdot}(\mathcal{U}, \mathcal{F}(l))_\mu$ est exact en degré $s > 0$ d'après le théorème 12.6, puisque sa cohomologie est égale à $(R^s\pi_*\mathcal{F}(l))_\mu$ par la proposition 2.31. De plus, sa cohomologie en degré 0 est égale pour la même raison à $(R^0\pi_*\mathcal{F}(l))_\mu$.

En conclusion, pour $l >> 0$, le A_μ-module $(R^0\pi_*\mathcal{F}(l))_\mu$ admet une résolution à droite par le complexe $\check{C}^{\cdot}(\mathcal{U}, \mathcal{F}(l))_\mu$ qui est constitué de A_μ-modules plats. Il est donc plat sur A_μ par la proposition 12.3, et comme il est de type fini par le théorème 12.6, il est libre par le lemme 12.2. Ceci montre le "seulement si".

Il reste à voir que la condition est aussi suffisante. L'énoncé étant local sur B, on peut supposer que B est affine, $B = Spec\,A$. Soit l_0 tel que pour $l \geq l_0$, $R^0\pi_*\mathcal{F}(l) := M_l$ soit plat sur A.

On a $X \subset B \times_k \mathbb{P}^N_k$, avec $\mathbb{P}^N_k \cong Proj\,k[X_0, \ldots, X_N]$, et le $A[X_0, \ldots, X_N]$-module gradué

$$M := \oplus_{l \geq l_0} M_l$$

est plat sur A.

Or le faisceau $\mathcal{F}$ (vu comme un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_k}$-modules) est déduit de M par la contruction décrite dans la section 2.4 : l'ensemble de ses sections sur un ouvert affine standard, c'est-à-dire de la forme

$$Spec\,A[X_0/X_i, \ldots, X_N/X_i] \subset B \times_k \mathbb{P}^N_k$$

est égal à $M_{X_i,0}$, c'est-à-dire la partie de degré 0 du localisé de M le long de X_i. Cet ensemble est clairement plat comme A-module, étant un facteur direct du localisé de M le long de X_i. ■

Lorsque la base B est irréductible et réduite, nous pouvons finalement reformuler la condition de platitude ci-dessus en termes de polynôme de Hilbert de la manière suivante :

Théorème 12.8 *Soit $B = Spec\,A$, où A est une k-algèbre locale intègre d'idéal maximal μ, et soient $K = Frac\,A$, $k_\mu = A/\mu$ le corps de fractions et le corps résiduel de A. On note $0 \in Spec\,A$ le point fermé d'idéal μ. Soit $\pi : X \to B$ un morphisme projectif et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors $\mathcal{F}$ est plat sur B si et seulement si les polynômes de Hilbert de $\mathcal{F}_K$ sur X_K et de $\mathcal{F}_{|X_0}$ sur X_0 sont égaux.*

Ici $X_0 \subset X$ est la fibre centrale de π, définie par l'idéal $\pi^*\mu \cdot \mathcal{O}_X$.

Démonstration. On montre en utilisant le théorème d'annulation 12.6 appliqué à $\mathcal{I}_{X_0}\mathcal{F}$ que pour $l >> 0$, on a un isomorphisme canonique donné par la restriction :

$$(R^0\pi_*\mathcal{F}(l))_{|0} \cong H^0(X_0, \mathcal{F}_{|X_0}(l)). \tag{99}$$

On utilise pour cela la suite exacte

$$0 \to \mathcal{I}_{X_0}\mathcal{F}(l) \to \mathcal{F}(l) \to \mathcal{F}_{|X_0}(l) \to 0,$$

avec l'annulation $R^1\pi_*(\mathcal{I}_{X_0}\mathcal{F}(l)) = 0$ pour $l >> 0$, qui fournit la suite exacte :

$$0 \to R^0\pi_*(\mathcal{I}_{X_0}\mathcal{F}(l)) \to R^0\pi_*\mathcal{F}(l) \to H^0(X_0, \mathcal{F}_{|X_0}(l)) \to 0.$$

Par ailleurs, soient $g_1, \ldots, g_n$ des générateurs de μ comme A-module. On a alors une surjection

$$A^n \to \mu \to 0,\ (a_i) \mapsto \sum_i g_i a_i,$$

qui induit, du fait que

$$\mathcal{I}_{X_0} = \pi^*\mu \cdot \mathcal{O}_X,$$

une suite exacte de faisceaux cohérents sur X (définissant K)

$$0 \to K \to \mathcal{F}^n \to \mathcal{I}_{X_0}\mathcal{F} \to 0.$$

Tensorisant cette suite exacte par $\mathcal{O}(l)$ et utilisant le fait que pour $l >> 0$, $R^1\pi_*K(l) = 0$, on conclut que la flèche naturelle

$$\mu \otimes R^0\pi_*\mathcal{F}(l) \to R^0\pi_*(\mathcal{I}_{X_0}\mathcal{F}(l))$$

est surjective pour l suffisamment grand, d'où l'on déduit que (99) est un isomorphisme pour $l >> 0$.

On trouve donc que le polynôme de Hilbert P_0 de $\mathcal{F}_{|X_0}$ satisfait pour $l >> 0$:

$$P_0(l) = rang_{k_\mu}(R^0\pi_*\mathcal{F}(l)_{|0}).$$

Par ailleurs on a aussi

$$R^0\pi_*\mathcal{F}(l) \otimes_A K = H^0(X_K, \mathcal{F}_K(l)),$$

et donc le polynôme de Hilbert P_K de $\mathcal{F}_K$ satisfait :

$$P_K(l) = rang_K(R^0\pi_*\mathcal{F}(l)_K).$$

L'égalité des deux polynômes de Hilbert se traduit donc par le fait que $R^0\pi_*\mathcal{F}(l)$ a son rang générique égal au rang de sa restriction au point fermé 0, ce qui équivaut au fait qu'il est libre sur A (cf lemme 7.16). Il suffit alors d'appliquer le théorème 12.7. ■

12.4 Polynôme de Hilbert et finitude

12.4.1 Degré

Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ un sous-schéma de dimension r. On a défini dans la section 3.6 le degré de X, noté $deg\, X$, qui satisfait les propriétés suivantes :

- Si $r = 0$, l'anneau $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie. On a $deg\, X = dim_k\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

- Si $r > 0$, on a $deg\, X = deg\, H$, où H est une section hyperplane de X telle que $dim\, H = r - 1$ et ne contenant aucune composante irréductible de X.

Dans la section 9.4.1, on a défini le degré d'un fibré inversible sur une courbe projective lisse C. La compatibilité de ces définitions résulte du fait que si $C \subset \mathbb{P}^n_k$, on a

$$deg\, C = deg\, \mathcal{O}(1)_{|C}.$$

En effet, par définition, $deg\, \mathcal{O}(1)_{|C}$ est la longueur (ou degré) du schéma $div\, \sigma$, où σ est une section rationnelle non nulle de $\mathcal{O}(1)$. Or si on prend une projection linéaire p de C sur $\mathbb{P}^1_k$ donnée par deux sections X_i, X_j sans zéros communs sur C, et si on prend l'image inverse $p^{-1}(x)$ d'un point x de $\mathbb{P}^1_k$ d'équation $\alpha X_i - \beta X_j$, $p^{-1}(x)$ n'est rien d'autre que le sous-schéma de C défini par la section $\alpha X_i - \beta X_j$ de $\mathcal{O}(1)_{|C}$.

12.4.2 Lien avec le polynôme de Hilbert

Le polynôme de Hilbert P_X de $X \subset \mathbb{P}^n_k$ est défini comme le polynôme de Hilbert du faisceau cohérent $\mathcal{O}_X$.

Théorème 12.9 *Le degré de P_X est égal à $r = dim\, X$, et le coefficient dominant (c'est-à-dire de degré r) de P_X est égal à $\frac{deg\, X}{r!}$.*

Démonstration. Si $dim\, X = 0$, le polynôme de Hilbert est une constante égale à $h^0(\mathcal{O}_X) = deg\, X$. Avec la convention $0! = 1$, l'énoncé est donc correct.

D'autre part, on a vu que si H est une section hyperplane de X ne contenant aucune composante irréductible de X, et donc définie par une section σ de $\mathcal{O}_X(1)$ qui n'est pas localement un diviseur de 0, on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(1) \to \mathcal{O}_H(1) \to 0.$$

Cette suite exacte tordue par $\mathcal{O}_X(l-1)$ donne, compte tenu de l'annulation

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(l-1)) = 0,\ l >> 0$$

pour l suffisamment grand, la suite exacte :

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_X(l-1)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(l)) \to H^0(H, \mathcal{O}_H(l)) \to 0$$

qui montre que

$$P_H(l) = P_X(l) - P_X(l-1).$$

L'hypothèse de récurrence dit que P_H est un polynôme de degré $r-1$ de coefficient dominant $\frac{deg\,H}{(r-1)!} = \frac{deg\,X}{(r-1)!}$, ce qui donne immédiatement le résultat. ■

12.4.3 Enoncés de finitude

On se propose de montrer un certain nombre d'énoncés remarquables concernant les sous-schémas X à polynôme de Hilbert fixé. On sait (corollaire 2.42) que pour $X \subset \mathbb{P}^n_k$ fixé, les applications de restriction

$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(l)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(l))$$

sont surjectives pour l assez grand. On sait aussi (théorème 2.40) que pour l suffisamment grand, les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{O}_X(l))$ et $H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l))$ s'annulent, pour $i > 0$. De plus on a $dim\, H^0(X, \mathcal{O}_X(l) = P_X(l)$, par définition de P_X. Enfin le faisceau $\mathcal{I}_X(l)$ est engendré par ses sections pour $l >> 0$.

A priori, le l minimum pour lesquels ces énoncés sont satisfaits dépend de X, même à degré fixé. On peut considérer par exemple le cas de X de dimension 1 : si on ajoute des points à X, obtenant un schéma $X' := X \bigsqcup \{p_1, \ldots, p_K\}$, on ne change pas son degré. Cependant, il est manifeste que la surjectivité de l'application de restriction

$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(l)) \to H^0(X', \mathcal{O}_{X'}(l))$$

n'est pas possible pour un l indépendant de K, car la dimension du terme de droite tend vers l'infini avec K.

Il est remarquable que lorsqu'on *fixe le polynôme de Hilbert P*, on peut obtenir une estimation uniforme (indépendante de X à polynôme de Hilbert fixé $P_X = P$) pour les l satisfaisant ces énoncés.

Théorème 12.10 *Soit n un entier et fixons un polynôme P (prenant des valeurs entières sur les entiers) de degré $r \leq n$. Il existe un entier l_0 satisfaisant les propriétés suivantes : Pour tout sous-schéma $X \subset \mathbb{P}^n_k$, tel que $P_X = P$, et pour tout $l \geq l_0$,*

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(l)) = 0,\ i > 0. \tag{100}$$

$$H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}(l)) = 0,\ i > 0. \tag{101}$$

$$\mathcal{I}_X(l) \text{ est engendre par ses sections globales.} \tag{102}$$

Avant de donner la preuve du théorème, nous établissons deux résultats :

Proposition 12.11 *Si $X \subset \mathbb{P}^n_k$ est tel que*

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(l)) = 0,\ i > 0,$$

alors on a $P_X(l) = H^0(X, \mathcal{O}_X(l))$.

Démonstration. On montre plus généralement que pour tout $l \in \mathbb{Z}$, on a

$$P_X(l) = \chi(\mathcal{O}_X(l)) := \sum_i (-1)^i dim_k H^i(X, \mathcal{O}_X(l)). \tag{103}$$

La preuve se fait par récurrence sur la dimension de X, le cas $n = 0$ résultant des définitions. Choisissant une section σ de $\mathcal{O}_X(1)$ dont le diviseur ne contient aucune composante irréductible de X (ce qui peut nécessiter d'étendre le corps k si k est fini), on utilise la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X(l) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_X(l+1) \to \mathcal{O}_Y(l+1) \to 0,$$

où $Y = X \cap H$, $H \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$.

La suite exacte longue de cohomologie associée nous dit que

$$\chi(\mathcal{O}_X(l+1)) - \chi(\mathcal{O}_X(l)) = \chi(\mathcal{O}_Y(l+1)).$$

Comme on a $dim\, Y = dim\, X - 1$, l'hypothèse de récurrence nous donne

$$P_Y(l) = \chi(\mathcal{O}_Y(l)), \, \forall l \in \mathbb{Z}.$$

Il en résulte que $\chi(\mathcal{O}_X(l))$ est un polynôme en l. Comme on sait que P_X est un polynôme qui satisfait

$$P_X(l) = h^0(X, \mathcal{O}_X(l)) = \chi(\mathcal{O}_X(l))$$

pour l assez grand, on conclut que ces deux polynômes sont égaux.

■

Pour le second résultat, on introduit la notion de *régularité au sens de Mumford.*

Définition 12.12 *Un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}_k^n$ est dit régulier au sens de Mumford si*

$$H^i(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}(-i)) = 0, \, \forall i > 0.$$

Le théorème suivant est fondamental et extrêmement utile :

Théorème 12.13 *i) Si $\mathcal{F}$ est régulier au sens de Mumford, il est engendré par ses sections globales.*

ii) Si $\mathcal{F}$ est régulier au sens de Mumford, $\mathcal{F}(l)$ est régulier au sens de Mumford pour $l \geq 0$.

iii) De plus, sous la même hypothèse, pour tout $t \geq 0$, la flèche de multiplication

$$H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}) \otimes H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}(t)) \to H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}(t))$$

est surjective.

La démonstration se fera essentiellement par récurrence sur n, en observant tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 12.14 *La restriction de $\mathcal{F}$ à un hyperplan générique $H \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$ est encore régulière (ici, pour avoir un tel H, on suppose que le corps k est infini, par exemple algébriquement clos), mais la conclusion du théorème 12.13 reste vraie sur n'importe quel corps).*

Démonstration. En effet, la section hyperplane H définie par une équation $\sigma \in H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ étant générique, on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{F}(-l) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F}(-l+1) \to \mathcal{G}(-l+1) \to 0,$$

où $\mathcal{G} := \mathcal{F}_{|H}$. La suite exacte longue de cohomologie associée fournit alors

$$H^{l-1}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(-l+1)) \to H^{l-1}(\mathbb{P}^{n-1}_k, \mathcal{G}(-l+1)) \to H^l(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(-l)) \tag{104}$$

et l'annulation de $H^{l-1}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(-l+1))$ pour $l-1>0$ et de $H^l(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(-l)$ entraîne donc celle de $H^{l-1}(\mathbb{P}^{n-1}_k, \mathcal{G}(-l+1))$ pour $l-1>0$. ■

Démonstration du théorème 12.13. Pour obtenir i), on note la surjectivité de l'application de restriction

$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}) \to H^0(\mathbb{P}^{n-1}_k, \mathcal{F}_{|\mathbb{P}^{n-1}_k})$$

due à l'annulation de $H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(-1))$, et on raisonne ensuite par récurrence sur n, en utilisant le lemme 12.14.

La preuve de ii) se fait aussi par récurrence à l'aide du lemme 12.14. En fait, l'examen de la suite exacte longue (104) montre que $H^l(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(-l)) = 0$, $l>0$ et $H^l(\mathbb{P}^{n-1}_k, \mathcal{G}(-l+1)) = 0$, $l>0$ entraînent que $H^l(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(-l+1)) = 0$, $l>0$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}(1)$ est régulier au sens de Mumford.

La preuve de iii) est plus subtile. Notons d'abord qu'en utilisant le point ii), on se ramène à montrer la surjectivité de la mulitiplication

$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}) \otimes H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(1)) \to H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(1)).$$

La preuve de ce résultat nécessite l'introduction du complexe de Koszul qui est le complexe exact suivant de faisceaux localement libres sur l'espace projectif. Soit $W = H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(1))$. On a la flèche d'évaluation

$$e : W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)$$

qui est surjective, et cette flèche induit des flèches similaires

$$\bigwedge^k W \to \bigwedge^{k-1} W \otimes \mathcal{O}(1).$$

Le complexe de Koszul $\mathcal{K}^\cdot$ est le complexe dont on montre très facilement qu'il est exact :

$$0 \to \bigwedge^{n+1} W \otimes \mathcal{O}(-n-1) \to \ldots \to W \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to 0,$$

où la dernière flèche est ev tordue par $\mathcal{O}(-1)$. Ici le degré est donné par $\mathcal{K}^i = \bigwedge^{-i} W \otimes \mathcal{O}(i)$, $i \leq 0$.

Partant de $\mathcal{F}$, on veut savoir si la multiplication

$$W \otimes H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}) \to H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(1))$$

est surjective.

Pour voir cela, on tensorise le complexe de Koszul $\mathcal{K}^\cdot$ par $\mathcal{F}(1)$, ce qui nous donne un complexe exact $\mathcal{L}^\cdot$, de terme $\mathcal{L}^0 = \mathcal{F}(1)$ et $\mathcal{L}^{-1} = W \otimes \mathcal{F}$. On veut montrer que l'application

$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{L}^{-1}) \to H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{L}^0) \tag{105}$$

est surjective.

Il suffit pour cela de montrer que le complexe $\mathcal{L}^{\cdot \leq -2}$ satisfait $\mathbb{H}^2(\mathcal{L}^{\cdot \leq -2}) = 0$. En effet, soit K le noyau de l'application surjective $\mathcal{L}^{-1} \to \mathcal{L}^0$. La suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte

$$0 \to K \to \mathcal{L}^{-1} \to \mathcal{L}^0 \to 0$$

montre que la surjectivité de la flèche (105) est impliquée par l'annulation $H^1(\mathbb{P}^n_k, K) = 0$.

Comme le complexe $\mathcal{L}^\cdot$ est exact, K (placé en degré -2) est quasi-isomorphe au complexe $\mathcal{L}^{\cdot \leq -2}$ qui est une résolution à gauche de K. On a donc

$$H^1(\mathbb{P}^n_k, K) = \mathbb{H}^{-1}(\mathcal{L}^{\cdot \leq -2}).$$

Rappelons que $\mathcal{L}^i = \bigwedge^{-i} W \otimes \mathcal{F}(i+1)$. La suite spectrale associée à la filtration naïve du complexe $\mathcal{L}^{\cdot \leq -2}$ a pour terme

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{L}^p),$$

c'est-à-dire

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^n_k, \bigwedge^{-p} W \otimes \mathcal{F}(p+1)).$$

Or la régularité au sens de Mumford fournit l'annulation de tous les termes $E_1^{p,q}$, $q = -p-1$. Il en résulte que $E_\infty^{p,q} = 0$, pour $q = -p-1$ et donc que $\mathbb{H}^{-1}(\mathcal{L}^{\cdot \leq -2})$. ∎

Démonstration du théorème 12.10. Tout d'abord on note que (102) est une conséquence de (101) grâce au théorème 12.13. En effet, pour $l \geq l_0 + n$, où l_0 est choisi de façon que (101) est satisfait pour $l \geq l_0$, on voit que $\mathcal{I}_X(l)$ est régulier au sens de Mumford.

Pour obtenir les propriétés (100) et (101), on va raisonner par récurrence sur la dimension. Rappelons que si H est une section hyperplane générique de X, on a $P_H(l) = P_X(l) - P_X(l-1)$. Donc pour P_X fixé, P_H est aussi fixé, et on peut donc supposer qu'on a un entier m_0 tel que (100) et (101) sont satisfaits pour H et pour $l \geq m_0$. Notons que (101) pour H entraîne que l'application de restriction

$$H^0(\mathbb{P}^{n-1}_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}_k}(l)) \to H^0(H, \mathcal{O}_H(l))$$

est surjective, et il en résulte que la flèche de restriction :

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(l)) \to H^0(H, \mathcal{O}_H(l))$$

est aussi surjective. En écrivant la suite exacte longue de cohomologie associée à

$$0 \to \mathcal{O}_X(l-1) \to \mathcal{O}_X(l) \to \mathcal{O}_Y(l) \to 0,$$

on trouve (en utilisant la remarque précédente) que l'application

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(l-1)) \to H^i(X, \mathcal{O}_X(l))$$

est injective pour $l \geq m_0$, et comme ces groupes s'annulent pour $l >> 0$, on en déduit que $H^i(X, \mathcal{O}_X(l)) = 0$, $l \geq m_0 - 1$.

Il reste à prouver (101) pour X. En fait, la suite exacte

$$0 \to \mathcal{I}_X(l) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l) \to \mathcal{O}_X(l) \to 0$$

et le théorème d'annulation 2.36 montrent que l'annulation $H^i(X, \mathcal{O}_X(l))$ entraîne l'annulation de $H^{i+1}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l))$, et donc, puisqu'on a déjà (100) pour X, il suffit de se concentrer sur l'annulation de $H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l))$, qui équivaut aussi à la surjectivité de l'application de restriction

$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(l)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(l)).$$

Soit σ l'équation d'un hyperplan générique, et observons maintenant que la multiplication par $\sigma : H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l)) \to H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l+1))$ est surjective pour $l \geq m_0$ d'après la suite exacte

$$0 \to \mathcal{I}_X(l) \to \mathcal{I}_X(l+1) \to \mathcal{I}_H(l+1) \to 0$$

et (101) pour H.

Supposons qu'elle soit injective. Cela équivaut au fait que la flèche

$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l+1)) \to H^0(\mathbb{P}^{n-1}_k, \mathcal{I}_H(l+1))$$

est surjective. Or d'après le dernier énoncé dans le théorème 12.13 et (101) pour H, ceci entraîne que la flèche

$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l+s)) \to H^0(\mathbb{P}^{n-1}_k, \mathcal{I}_H(l+s))$$

est surjective pour tout $s \geq 1$, ce qui est à son tour équivalent à l'injectivité de $H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l+s-1)) \to H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l+s))$ pour tout $s \geq 1$. Mais pour s suffisamment grand, on sait que le terme de droite est nul. En conclusion, dès que la multiplication par $\sigma : H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l)) \to H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l+1))$ (qui est surjective) est injective, on sait en fait que $H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l'))$ est nul, pour $l' \geq l$.

Or on a $dim\, H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(m_0)) \leq dim\, H^0(X, \mathcal{O}_X(m_0)) = P_X(m_0)$ par (100) pour X et par la proposition 12.11. Il existe donc au plus $P_X(m_0)$ entiers l successifs $\geq m_0$ pour lesquels la flèche (surjective) $\sigma : H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l)) \to H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l+1))$ n'est pas injective.

Posant $l_0 = m_0 + P_X(m_0)$, on a donc montré le résultat pour X. ■

12.5 Schéma de Hilbert et Grassmanniennes

Le travail accompli précédemment permet de paramétrer les sous-schémas de $\mathbb{P}^n_k$ à polynôme de Hilbert fixé P par un sous-ensemble d'une certaine Grassmannienne. Il est en fait beaucoup plus difficile de montrer que ce sous-ensemble est un sous-ensemble algébrique fermé, qui est la composante du *schéma de Hilbert de* $\mathbb{P}^n_k$ correspondant au polynôme de Hilbert P.

Soit P un polynôme de degré r, prenant des valeurs entières sur les entiers. On va considérer les sous-schémas X de $\mathbb{P}^n_k$ avec $P_X = P$. La dimension d'un tel X est donc r, et son degré est déterminé par le coefficient dominant de P (Théorème 12.9). (Mais clairement, le degré est un invariant trop faible puisqu'il ne tient pas compte par exemple des composantes de X de dimension $< r$.)

Les résultats de la section 12.4.3 montrent qu'il existe un entier l_0, satisfaisant les propriétés suivantes :

1. On a $H^0(X, \mathcal{O}_X(l)) = P_X(l) = P(l)$, $l \geq l_0$.
2. L'application de restriction
$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(l)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(l))$$
est surjective pour $l \geq l_0$.
3. L'idéal $\mathcal{I}_X$ est engendré en degré l, c'est-à-dire que $\mathcal{I}_X(l)$ est engendré par ses sections globales.

Choisissons un $l \geq l_0$. D'après 2,
$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l)) \subset H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l))$$
est de codimension égale à $dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(l))$, qui vaut $P(l)$ d'après 1.

On peut donc associer à X un point $\Phi_l(X)$ de la grassmannienne G des sous-espaces vectoriels de codimension $P(l)$ de $H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l))$, donné par $\Phi_l(X) =: H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l))$.

Le point 3 montre maintenant que Φ_l est injective. En effet, on sait que $\mathcal{I}_X(l)$ est engendré par ses sections. Cela signifie que
$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l)$$
a pour image $\mathcal{I}_X(l)$, de sorte que $\mathcal{I}_X$ est déterminé par $\Phi_l(X)$.

La construction du schéma de Hilbert paramétrant tous les sous-schémas de $\mathbb{P}^n_k$ de polynôme de Hilbert P consiste à prendre l suffisamment grand et à exhiber des équations explicites décrivant l'image de Φ_l.

Supposons k de caractéristique 0. Il se trouve que ces équations sont à coefficients rationnels (NB : la grassmannienne est définie par des équations à coefficients rationnels dans le plongement de Plücker et donc cela a un sens de dire qu'une sous-variété de la grassmannienne est définie par des équations à coefficients rationnels.)

Par la propriété universelle de la Grassmannienne, il existe alors par restriction un sous-fibré tautologique du fibré trivial de fibre $H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(l))$ sur $\mathcal{H}_P$, et son image dans $pr_2^*\mathcal{O}(l)$ définit un sous-schéma dit universel
$$\pi : \mathcal{X}_P \to \mathcal{H}_P,\ \mathcal{X}_P \subset \mathcal{H}_P \times \mathbb{P}^n_k$$
projectif et plat sur $\mathcal{H}_P$, qui a la propriété que tout sous-schéma de $\mathbb{P}^n_K$ défini sur une extension de k et à polynôme de Hilbert égal à P est une fibre de π au-dessus d'un K-point de $\mathcal{H}_P$.

Une conséquence remarquable du fait que les schémas de Hilbert $\mathcal{H}_P$ sont définis sur $\mathbb{Q}$ est le fait suivant : tout sous-schéma analytique complexe X de l'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ admet une (petite) déformation plate sur un sous-schéma défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

En effet, on sait que X est algébrique, d'après le théorème 6.20 (principe GAGA). Soit P son polynôme de Hilbert. Soit $\mathcal{H}_P^X$ la composante irréductible du schéma de Hilbert de polynôme de Hilbert P de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ contenant le point correspondant à X. Comme $\mathcal{H}_P$ est défini sur $\mathbb{Q}$, $\mathcal{H}_P^X$ est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

On utilise alors maintenant le fait suivant :

Lemme 12.15 *Soit Z une variété projective complexe définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors les points de Z qui sont définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ sont denses dans Z pour la topologie usuelle.*

Démonstration. C'est une conséquence du lemme de normalisation d'Emmy Noether (Théorème 1.32) et de la densité de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$. ∎

13 Etude des images directes supérieures

13.1 Le théorème de semi-continuité

Soit $\pi : \mathcal{X} \to B$ un morphisme projectif entre variétés quasi-projectives lisses sur k. On notera $\mathcal{X}_b \subset \mathcal{X}$ la fibre $\pi^{-1}(b)$. On rappelle ici que pour $b \in B$ et $U \subset B$ un voisinage ouvert affine $U = Spec\, A$ de b dans B, dans lequel b correspond à un idéal premier μ de A, on a $k(b) = A_\mu/\mu$, et $\mathcal{X}_b \subset \mathcal{X}$ est défini par l'idéal $\phi^*\mu \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathcal{X}$, plat sur B. On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème 13.1 *L'application*

$$b \mapsto dim_{k(b)} H^q(\mathcal{X}_b, \mathcal{F}_{|\mathcal{X}_b})$$

est semi-continue supérieurement.

Remarque 13.2 La platitude est nécessaire dans cet énoncé. En effet, la semi-continuité pour la topologie de Zariski entraîne en particulier, dans le cas où la base est irréductible réduite, que si $K = k(B)$ est le corps résiduel du point générique, et si $b \in B$ est n'importe quel point (nécessairement une spécialisation du point générique, on doit avoir :

$$dim_{k(b)} H^q(\mathcal{X}_b, \mathcal{F}_{|\mathcal{X}_b}) \geq dim_K H^q(\mathcal{X}_K, \mathcal{F}_K).$$

Considérons l'exemple suivant :

$B = Spec\, k[t]$ est la droite affine, $\mathbb{P}^2_k = Proj\, k[X_0, X_1, X_2]$, et

$$X \subset B \times_k \mathbb{P}^1_k,\ \pi = pr_1$$

est défini par l'équation tX_2 (homogène en la seconde variable). Soit $\mathcal{F}$ le faisceau $pr_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2))$. La fibre générique de π est clairement isomorphe à $\mathbb{P}^1_K$, et on a

$$H^1(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(-2)) \neq 0.$$

Par contre la fibre spéciale au-dessus de du point 0 d'idéal $tk[t]$ est isomorphe à $\mathbb{P}^2_k$ et on a

$$H^1(\mathbb{P}^2_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(-2)) = 0.$$

Le théorème ci-dessus est une conséquence du théorème fondamental suivant concernant les images directes supérieures des faisceaux plats sur une base.

Théorème 13.3 *Sous les hypothèses faites ci-dessus, il existe un complexe de faisceaux cohérents localement libres sur B :*

$$\ldots \mathcal{E}^{i-1} \to \mathcal{E}^{i} \to \mathcal{E}^{i+1} \to \ldots$$

ayant les propriétés suivantes :

1. *On a*
$$\mathcal{H}^i(\mathcal{E}^{\cdot}) \cong R^i\pi_*\mathcal{F}.$$
2. *De plus, pour tout $b \in B$, on a aussi*
$$H^i(\mathcal{X}_b, \mathcal{F}_{|\mathcal{X}_b}) = H^i(\mathcal{E}^{\cdot}_{|b}).$$

Dans la section suivante, on expliquera la compatibilité des isomorphismes (1) et (2). Dans l'immédiat, le théorème de semi-continuité ne nécessite pas cette précision. On va d'abord montrer comment le théorème 13.3 entraîne le théorème 13.1.

Démonstration du théorème 13.1. L'énoncé de semi-continuité est local. On peut donc supposer que B est affine, $B = Spec\, A$, et que les faisceaux localement libres $\mathcal{E}^i$ sont triviaux de rang e_i. Les différentielles $d_i : \mathcal{E}^i \to \mathcal{E}^{i+1}$ sont alors données par des matrices M_i à coefficients dans A. D'après le théorème 13.3, 2, on a

$$dim_{k(b)} H^q(\mathcal{X}_b, \mathcal{F}_{|\mathcal{X}_b}) = e_q - rang_{k(b)} M^q_{|b} - rang_{k(b)} M^{q-1}_{|b}.$$

Ici la matrice $M^q_{|b}$ est la matrice à coefficients dans $k(b)$ qui est l'image de M par le morphisme $A \to k(b)$. Le théorème résulte donc du lemme 13.4 suivant. ∎

Lemme 13.4 *Si M est une matrice à coefficients dans A, la fonction $b \mapsto rang\, M_{|b}$ est semi-continue inférieurement sur $Spec\, B$.*

Démonstration. Le rang $r(b)$ de $M_{|b}$, où $b \in Spec\, A$ est correspond à l'idéal premier $\mu \in A$, est le plus grand entier r tel qu'un mineur d'ordre r de M ne soit pas dans μ. Si $a \in A$ est un tel mineur, a définit un ouvert U_a de $Spec\, A$, tel que $\mu \in U_a$. Sur U_a, a est inversible, et donc pour tout $b' \in U_a$, on a $rang\, M_{|b'} \geq r$. ∎

Démonstration du théorème 13.3. Plongeons $\mathcal{X}$ dans $B \times \mathbb{P}^N_k$ au-dessus de B. (Cela veut dire que le plongement j satisfait $\pi = pr_1 \circ j$.) $\mathcal{F}$ devient alors un faisceau cohérent sur $B \times \mathcal{P}^N_k$, et comme j_* est exact, on a $R^i pr_{1*}(\mathcal{F}) = R^i\pi_*(j_*\mathcal{F})$. En conclusion, on peut supposer $\mathcal{X} = B \times \mathbb{P}^N_k$ et $\pi = pr_1$.

On utilise maintenant la caractérisation des faisceaux plats à support projectif donnée dans le théorème 12.7. On sait que pour un l suffisamment grand

$$R^0\pi_*\mathcal{F}(l)$$

est localement libre. De plus, la flèche naturelle d'évaluation

$$\pi^*(R^0\pi_*\mathcal{F}(l)) \to \mathcal{F}(l)$$

est surjective (c'est la version relative du théorème 2.43).

On a donc une flèche surjective

$$\pi^*(R^0\pi_*\mathcal{F}(l)) \otimes pr_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_k}(-l) \to \mathcal{F} \to 0.$$

Le terme de gauche est localement libre sur $B \times_k \mathbb{P}^N_k$ et donc aussi plat sur B. On en déduit par la proposition 12.3 que le noyau $\mathcal{G}$ de cette flèche est encore un faisceau cohérent plat sur B. De proche en proche, on construit une résolution à gauche de $\mathcal{F}$ dont le terme général est de la forme

$$\mathcal{D}^i = \pi^*\mathcal{G}^i \otimes pr_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_k}(-l_i),$$

où $\mathcal{G}^i$ est localement libre sur B. Ici les i sont négatifs, le terme de degré 0 étant le terme

$$\pi^*(R^0\pi_*\mathcal{F}(l)) \otimes pr_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_k}(-l)$$

ci-dessus, de sorte que le complexe $\mathcal{D}^\cdot$ est quasi-isomorphe à $\mathcal{F}$ placé en degré 0.

On utilise maintenant le fait que

$$R^j\pi_*(pr_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_k}(-l)) = 0, \text{ pour } j \neq N \tag{106}$$

et que pour tout faisceau cohérent $\mathcal{M}$ sur $B \times_k \mathbb{P}^N_k$, on a

$$R^j\pi_*\mathcal{M} = 0 \text{ pour } j > N. \tag{107}$$

De même, on a sur chaque fibre $\mathbb{P}^N_{k(b)}$,

$$\begin{aligned} H^j(\mathbb{P}^N_{k(b)}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_{k(b)}}(-l)) = 0, \ \text{pour } j \neq N, \\ H^j(\mathbb{P}^N_{k(b)}, \mathcal{M}') = 0, \ j > N, \end{aligned} \tag{108}$$

pour tout faisceau cohérent $\mathcal{M}'$ sur $\mathbb{P}^N_{k(b)}$.

Scindant la résolution à gauche de $\mathcal{F}$ par le complexe $\mathcal{D}^\cdot$ en suites exactes courtes, on conclut à l'aide des annulations ci-dessus que $R^{N+p}\pi_*\mathcal{F}$ est la cohomologie du complexe induit

$$R^N\pi_*\mathcal{D}^{p-1} \to R^N\pi_*\mathcal{D}^p \to R^N\pi_*\mathcal{D}^{p+1} \to \ldots,$$

(où l'on place $R^N\pi_*\mathcal{D}^p$ en degré $N+p$).

Comme $R^N\pi_*\mathcal{D}^p$ est localement libre, car il est isomorphe à

$$\mathcal{G}^p \otimes_k H^N(\mathbb{P}^N_k, \mathcal{O}(-l_p)),$$

on a bien montré la partie 1 du théorème, en posant

$$\mathcal{E}^i := \mathcal{G}^p \otimes_k H^N(\mathbb{P}^N_k, \mathcal{O}(-l_p), \, i = N+p.$$

Il reste à voir ce qui se passe ponctuellement, c'est-à-dire après restriction à la fibre au-dessus d'un point b de B. Le point clé est le fait que la résolution à gauche de $\mathcal{F}$ par le complexe $\mathcal{D}^\cdot$ fournit pour chaque $b \in B$ une résolution à gauche de $\mathcal{F}_{|\mathbb{P}^N_{k(b)}}$ sur $\mathbb{P}^N_{k(b)}$, du fait que $\mathcal{F}$ est plat sur B et que tous les faisceaux $\mathcal{D}^p$ sont plats sur B

(c'est une des raisons du passage de $\mathcal{X}$ à $B \times \mathbb{P}^N_k$, car $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ n'était pas nécessairement plat sur B).

On calcule alors la cohomologie de $\mathcal{F}_{|\mathbb{P}^N_{k(b)}}$ grâce à cette résolution, par le même argument d'annulation que précédemment, (en utilisant (108) à la place de (106), (107)), et on trouve bien que

$$H^j(\mathbb{P}^N_{k(b)}, \mathcal{F}_{|\mathbb{P}^N_{k(b)}}) = H^j(\mathcal{E}^{\cdot}_{|b}).$$

■

13.2 Changement de base

13.2.1 Morphisme de changement de base

Soit $\pi : \mathcal{X} \to B$ un morphisme projectif et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathcal{X}$. Pour tout morphisme de changement de base :

$$c : B' \to B$$

on a la famille

$$\mathcal{X}' := B' \times_B \mathcal{X} \overset{c_X = pr_2}{\to} \mathcal{X},\ \mathcal{X}' \overset{\pi' = pr_1}{\to} B',$$

et un faisceau $\mathcal{F}' := c_X^* \mathcal{F}$ sur $\mathcal{X}'$.

On a une flèche de pull-back

$$c_X^* : H^i(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \to H^i(\mathcal{X}', \mathcal{F}').$$

On peut faire cette opération pour tous les ouverts $U' \subset B'$ et $U \subset B$ tels que $c(U') \subset U$. Rappelant que

$$R^i\pi'_*\mathcal{F}',\ R^i\pi_*\mathcal{F}$$

sont les faisceaux cohérents sur B' (resp. B) associés aux préfaisceaux

$$U' \mapsto H^i(\mathcal{X}'_{U'}, \mathcal{F}'),\ U \mapsto H^i(\mathcal{X}_U, \mathcal{F}),$$

on déduit des applications $c^*_{U',U}$ un morphisme dit de changement de base :

$$c^i_\mathcal{F} : c_X^*(R^i\pi_*\mathcal{F}) \to R^i\pi'_*\mathcal{F}'.$$

Définition 13.5 *On dit que $\mathcal{F}$ satisfait la propriété de changement de base si les morphismes $c^i_\mathcal{F}$ sont des isomorphismes pour tout $c : B' \to B$.*

Dans la suite on considérera surtout le cas où c est l'inclusion d'un point.

13.2.2 Le théorème de changement de base

Ce théorème nous donne un critère pour qu'un faisceau $\mathcal{F}$ plat sur B satisfasse la propriété de changement de base.

Ici on suppose que $B = Spec\, A$ avec A une k-algèbre intègre, et que $b \in B$ est un point correspondant à un idéal premier μ de A. On note $K = Frac\, A$ et $k(b) = A_\mu/\mu A_\mu$. Soit comme plus haut $\pi : \mathcal{X} \to B$ un morphisme projectif et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathcal{X}$ qui est plat sur B.

Théorème 13.6 *Supposons que*

$$dim_K H^q(\mathcal{X}_K, \mathcal{F}_K) = dim_{k(b)} H^q(\mathcal{X}_b, \mathcal{F}_{|\mathcal{X}_b}).$$

Alors il existe un voisinage B' de b dans B tel que $R^q\pi_*\mathcal{F}$ est localement libre sur B', et tel que pour tout $b' \in B'$, le morphisme de changement de base

$$R^q\pi_*\mathcal{F}_{|b'} \to H^q(\mathcal{X}_{b'}, \mathcal{F}_{|\mathcal{X}_{b'}}) \tag{109}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Tout d'abord on observe qu'avec les notations du théorème 13.3, l'application de changement de base (109) est simplement donnée par l'application naturelle

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{E}^\cdot)_{|b'} \to H^q(\mathcal{E}^\cdot_{|b'}).$$

(c'est précisément la compatibilité à laquelle on fait allusion après l'énoncé du théorème 13.3). On peut supposer quitte à restreindre B que les $\mathcal{E}^i$ sont triviaux de rang e_i. Les différentielles d_i sont donc données par des matrices M_i à coefficients dans A. D'après le théorème 13.3, on trouve que

$$dim_K H^q(\mathcal{X}_K, \mathcal{F}_K) = e_q - rang\, M_{q,K} - rang\, M_{q-1,K}.$$

Ici les rangs sont les rangs des matrices M_i vues comme des matrices à coefficients dans K. (Le rang d'une matrice à coefficients dans un anneau n'a pas de sens.) De même on a :

$$dim_{k(b)} H^q(\mathcal{X}_b, \mathcal{F}_{|\mathcal{X}_b}) = e_q - rang\, M_{q|b} - rang\, M_{q-1|b},$$

où $M_{q|b}$ est la matrice à coefficients dans $k(b)$ qui est l'image de M_q via l'application $A \to A_\mu/\mu A_\mu$. L'égalité

$$dim_K H^q(\mathcal{X}_K, \mathcal{F}_K) = dim_{k(b)} H^q(\mathcal{X}_b, \mathcal{F}_{|\mathcal{X}_b})$$

entraîne alors par semi-continuité inférieure du rang que les rangs de $M_{q,K}$ et $M_{q|b}$ sont égaux, et que les rangs de $M_{q-1,K}$ et $M_{q-1|b}$ sont égaux. De plus, ceci est vrai pour b' dans un voisinage de b.

En conclusion, quitte à remplacer B par B', on trouve que les matrices M_q et M_{q-1} sont de rang constant sur B'. On montre alors en utilisant le lemme suivant, et surtout son corollaire 13.8 que $Ker\, M_q$ et $Im\, M_{q-1}$ sont des sous-faisceaux localement libres de $\mathcal{E}^q$, et que

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{E}^\cdot)_{|b'} \to H^q(\mathcal{E}^\cdot_{|b'})$$

est un isomorphisme pour $b' \in B'$. ∎

Lemme 13.7 *Soit $M : A^r \to A^s$ une matrice à coefficients dans un anneau intègre A, et soit $b \in Spec\, A$ tel que le rang de la matrice $M_{k(b)} = M_\mu/\mu M_\mu$, à coefficients dans $k(b) = A_\mu/\mu A_\mu$ soit égal au rang de la matrice M vue comme matrice à coefficients dans $K = Frac\, A$. Alors il existe $f \in A$, $f \notin \mu$, tel qu'on ait sur $Spec\, A_f$:*

$$A_f^r = A_1 \oplus A_2,\ A_f^s = A_2 \oplus B_2,$$

où A_1, A_2, B_1, B_2 sont libres sur A_f, et tels que M s'identifie à la projection de A_f^r sur A_2 suivi de l'injection de A_2 dans A_f^s.

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 13.8 *Pour tout* $b \in Spec\, A_f$*, on a sous les mêmes hypothèses :*

$$Ker\, M_{|b} \cong (Ker\, M)_{|b}.$$

Remarque 13.9 Notons aussi que l'égalité

$$Im\, M_{|b} \cong (Im\, M)_{|b}$$

est aussi satisfaite en général, comme conséquence de l'exactitude à droite du foncteur $\otimes_{A_\mu} k(b)$.

Démonstration du lemme 13.7. Soit e le rang de M sur K. Alors tous les mineurs de taille $(e+1, e+1)$ de M s'annulent dans K, donc aussi dans A. Donc les mineurs de taille $(e+1, e+1)$ de la matrice $M_{|b}$, qui sont ceux de M modulo μ s'annulent. L'hypothèse est que le rang de la matrice $M_{|b}$ est e, de sorte qu'il existe un mineur de taille (e, e) de $M_{|b}$ qui ne s'annule pas. Soit $f \in A$ le mineur de M correspondant. On a donc $f \notin \mu$ et $\mu \in Spec\, A_f$. On peut supposer quitte à permuter les bases de A^r et A^s que le mineur considéré est obtenu en prenant les e premières lignes et les e premières colonnes de M. Posons

$$A_2 = A_f^e \subset A_f^r,$$

où l'inclusion est celle des e premières composantes, et soit $A_1 := Ker\, M$.

On va montrer que A_1 est projectif sur A_f, (et donc localement libre sur $Spec\, A_f$), et plus précisément que A_1 est un facteur direct de A_f^r :

$$A_f^r = A_1 \oplus A_2.$$

De plus, M fournit un isomorphisme $A_2 \cong Im\, M$, et $A_2 = Im\, M \subset A_f^s$ est en facteur direct.

Comme le premier mineur de taille (e, e) de M est inversible dans A_f, la matrice M_e constituée des m_{ij}, $i \leq e$, $j \leq e$, est inversible sur A_f. Soit m un vecteur colonne de M, et m_e le vecteur colonne obtenu en prenant ses e premières composantes. Comme M_e est inversible sur A_f, on peut écrire

$$m_e = \sum_{i \leq e} a_i m_{i,e},\ a_i \in A_f,$$

où les a_i sont obtenus à l'aide de la matrice M_e^{-1}, à coefficients dans A_f. Comme les mineurs de taille $(e+1, e+1)$ de M sont nuls, et en particulier ceux extraits des e premiers vecteurs colonnes m_i, $i \leq e$ de M et de m, on trouve qu'on a en fait la relation

$$m = \sum_{i \leq e} a_i m_i.$$

En conclusion, on a construit une projection p de A_f^r sur A_2, donnée par $M_e^{-1} \circ p_e \circ M$, où p_e est la projection de A_f^s sur A_f^e engendré par les e premiers vecteurs, satisfaisant la propriété :

$$M = M \circ p. \tag{110}$$

La formule (110) ci-dessus montre que $Id - p$ est une projection sur $Ker\, M \subset A_f^r$.

Soit par ailleurs

$$\pi = M \circ M_e^{-1} \circ p_e : A_f^s \to A_f^s,$$

Alors

$$\pi \circ M = M \circ M_e^{-1} \circ p_e \circ M = M \circ p = M,$$

et de plus

$$\pi^2 = \pi \circ M \circ M_e^{-1} \circ p_e = M \circ M_e^{-1} \circ p_e = \pi.$$

Donc π est une projection sur $Im\, M$, et on sait aussi que $Im\, M = Im\, M \circ p \cong A_2$ puisque $M_{|A_2}$ est injective.

■

13.3 Application à la cohomologie de de Rham

13.3.1 La connexion de Gauss-Manin

Point de vue complexe. Soit $\pi : \mathcal{X} \to B$ un morphisme submersif et propre entre variétés complexes. (On pourrait en fait remplacer ici variétés complexes par espaces analytiques, et formuler la définition adéquate garantissant que $\pi : \mathcal{X} \to B$ est une famille de variétés complexes lisses.)

Localement au-dessus de B, cette famille est topologiquement triviale. C'est-à-dire que pour tout $0 \in B$, il existe un voisinage $U \subset B$ de 0 tel qu'il existe

$$t : \mathcal{X}_U \cong X_0 \times U$$

où le difféomorphisme t est une trivialisation au-dessus de U, au sens où $pr_2 \circ t = \pi$.

U admet une base d'ouverts V qui sont contractiles (des boules par exemple), et donc

$$H^i(\mathcal{X}_V, \mathbb{C}) \cong H^i(X_0, \mathbb{C}),\ \forall i \geq 0.$$

Par définition, cela signifie que le faisceau

$$R^i\pi_*\mathbb{C}$$

est localement constant sur B (c'est-à-dire qu'il est localement isomorphe à un faisceau constant : ce qu'on a vu plus haut montre qu'au voisinage de 0 il est isomorphe au faisceau constant de fibre $H^i(X_0, \mathbb{C})$).

Soit

$$\mathcal{H}^i := R^i\pi_*\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_B.$$

Les sections de $\mathcal{H}^i$ s'écrivent localement au voisinage de 0 sous la forme :

$$\alpha = \sum_s \alpha_s \sigma_s,$$

où σ_s est une base de $H^i(X_0, \mathbb{C})$. On pose

$$\nabla\alpha := \sum_s \sigma_s \otimes d\alpha_s \in \mathcal{H}^i \otimes \Omega_B.$$

Comme deux trivialisations du faisceau localement constant $R^i\pi_*\mathbb{C}$ sur des ouverts U, U', induisant comme ci-dessus des trivialisations du fibré $\mathcal{H}^i$ sur U et U', diffèrent sur $U \cap U'$ par l'action d'une matrice à coefficients constants, (donc annulés par d), on trouve que $\nabla\alpha$ est défini indépendamment de la trivialisation.

La forme locale de ∇ rend évidente que ∇ est une connexion, et aussi qu'elle est plate, c'est-à-dire qu'elle satisfait

$$\nabla \circ \nabla = 0 : \mathcal{H}^i \to \mathcal{H}^i \otimes \Omega_B^2,$$

puisque dans une trivialisation adéquate, elle agit comme la différentielle extérieure sur les coordonnées. (On rappelle ici que ∇ a été étendue par la règle de Leibniz en un opérateur différentiel du premier ordre

$$\mathcal{H}^i \otimes \Omega_B \to \mathcal{H}^i \otimes \Omega_B^2,$$

ce qui permet de donner un sens à $\nabla \circ \nabla$.)

Cette connexion est appelée la connexion de Gauss-Manin.

La construction de Katz. On observe tout d'abord que

$$\mathcal{H}^i = R^i\pi_*(\pi^{-1}\mathcal{O}_B).$$

D'autre part, on a la version relative du lemme de Poincaré holomorphe 8.8, qui montre que $\pi^{-1}\mathcal{O}_B$ admet une résolution par le complexe de de Rham relatif

$$\Omega^{\cdot}_{\mathcal{X}/B},$$

où

$$\Omega^l_{\mathcal{X}/B} := \bigwedge^l \Omega_{\mathcal{X}/B},\ \Omega_{\mathcal{X}/B} := \Omega_{\mathcal{X}}/\pi^*\Omega_B.$$

La différentielle relative d est induite par la différentielle absolue (on note que $\Omega^l_{\mathcal{X}/B}$ est le quotient de $\Omega^l_{\mathcal{X}}$ par $\pi^*\Omega_B \wedge \Omega^{l-1}_{\mathcal{X}}$).

La résolution de Poincaré holomorphe relative nous donne la description suivante de $\mathcal{H}^i$:

$$\mathcal{H}^i = R^i\pi_*(\Omega^{\cdot}_{\mathcal{X}/B}),$$

où les $R^i\pi_*$ sont ici les foncteurs “hyperdérivés” du foncteur π_*. Rappelant la formule définissant les faisceaux de formes différentielles holomorphes relatives :

$$\Omega^l_{\mathcal{X}/B} = \Omega^l_{\mathcal{X}}/(\pi^*\Omega_B \wedge \Omega^{l-1}_{\mathcal{X}}),$$

on introduit le faisceau $\mathcal{G}^l$ défini par

$$\mathcal{G}^l = \Omega^l_{\mathcal{X}/B}/\pi^*\Omega^2_B \wedge \Omega^{l-2}_{\mathcal{X}}.$$

On a une différentielle induite par d :

$$\mathcal{G}^l \to \mathcal{G}^{l+1}$$

et une suite exacte de complexes

$$0 \to \Omega^{\cdot-1}_{\mathcal{X}/B} \otimes \pi^*\Omega_B \to \mathcal{G}^{\cdot} \to \Omega^{\cdot}_{\mathcal{X}/B} \to 0,$$

où la différentielle sur $\Omega^{\cdot -1}_{\mathcal{X}/B} \otimes \pi^*\Omega_B$ est induite par la différentielle relative (qui est $\pi^{-1}\mathcal{O}_B$-linéaire). On en déduit une suite exacte longue des foncteurs dérivés de π_* qui fournit

$$R^i\pi_*(\Omega^{\cdot}_{\mathcal{X}/B}) \to R^{i+1}\pi_*(\Omega^{\cdot -1}_{\mathcal{X}/B}) \otimes \Omega_B,$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{H}^i \to \mathcal{H}^i \otimes \Omega_B.$$

On peut montrer que cette flèche n'est autre que la connexion de Gauss-Manin.

L'intérêt de cette construction due à Katz est qu'elle est "algébrique" au sens suivant : supposons que $\pi : \mathcal{X} \to B$ soit la version analytique d'un morphisme projectif submersif ϕ entre variétés quasi-projectives complexes $\mathcal{Y}$ et C, c'est-à-dire

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y}^{an},\ B = C^{an},\ \pi = \phi^{an}.$$

On dispose de la version algébrique du complexe de de Rham relatif et du complexe $\mathcal{G}^{\cdot}$ défini ci-dessus, de sorte qu'on a

$$\Omega^{\cdot}_{\mathcal{X}/B} = (\Omega^{\cdot}_{\mathcal{Y}/C})^{an},$$

et de même définissant

$$\mathcal{M}^l = \Omega^l_{\mathcal{Y}/C}/\pi^*\Omega^2_C \wedge \Omega^{l-1}_{\mathcal{Y}},$$

on trouve que

$$\mathcal{G}^{\cdot} = (\mathcal{M}^{\cdot})^{an}.$$

Le théorème GAGA de Serre (ou plutôt sa version relative) nous fournit des isomorphismes

$$\mathcal{H}^i = R^i\phi_*(\Omega^{\cdot}_{\mathcal{Y}/C})^{an},$$

et la construction de Katz nous fournit la version algébrique de la connexion de Gauss-Manin :

$$\nabla : R^i\phi_*(\Omega^{\cdot}_{\mathcal{Y}/C}) \to R^i\phi_*(\Omega^{\cdot}_{\mathcal{Y}/C}) \otimes_{\mathcal{O}_C} \Omega_{C/\mathbb{C}}.$$

13.3.2 La propriété de changement de base pour les $H^{p,q}$

Soit $\mathcal{X}$ un schéma analytique de sous-schéma réduit sous-jacent X lisse et compact. Soit $\pi : \mathcal{X} \to S$ une application submersive, où S est un schéma artinien local, (on supposera pour simplifier $S = Spec\,\mathbb{C}[t]/(t^{n+1})$), la fibre centrale étant isomorphe à X. En d'autres termes, $\mathcal{X}$ est une déformation d'ordre fini n de X paramétrée par S.

Théorème 13.10 *Si X est kählérienne, les faisceaux $R^q\pi_*\Omega^p_{\mathcal{X}/S}$ sont libres sur S.*

Démonstration. Soit $S = Spec\,A$, $A = \mathbb{C}[t]/(t^{n+1})$. Pour un module M de type fini sur A, on a deux invariants associés à M :

- D'une part la longueur $l(M)$, qui est dans notre cas la dimension comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel de M ;

- D'autre part le rang de $M_{|0} := M/\mathcal{M}M$ sur le corps $\mathbb{C} = A/\mathcal{M}A$, où $\mathcal{M} = tA$ est l'idéal maximal de A.

On a la caractérisation suivante des A-modules libres :

Lemme 13.11 *M est localement libre sur A si et seulement si*

$$l(M) = rang(M_{|0})l(A).$$

(Ici $l(A) = n+1$.)

Démonstration. En effet, on prend une base e_i, $1 \leq i \leq rang(M_{|0})$, de $M_{|0}$, qu'on remonte dans M, soit $f_i \in M$. Le lemme de Nakayama montre alors qu'on a une surjection

$$\oplus_i A f_i \to M.$$

D'où, par l'additivité de la longueur, l'inégalité

$$l(M) \leq rang(M_{|0})l(A)$$

avec égalité si et seulement si cette flèche est un isomorphisme. ∎

Regardons le complexe de de Rham relatif $\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}$, et considérons

$$H := R^k \pi_* \Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}.$$

On utilisera le lemme suivant que l'on pourra appliquer à H vu l'existence de la connexion de Gauss-Manin sur H

$$\nabla : H \to H \otimes \Omega_S.$$

Lemme 13.12 *Soit H un faisceau cohérent sur $Spec\, A$, admettant une connexion*

$$\nabla : H \to H \otimes_A \Omega_{A/\mathbb{C}}.$$

Alors H est un module libre sur S.

Démonstration. Soit $e_1, \ldots, e_r$ une base de $H_{|0}$, qu'on remonte en un système de générateurs $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_r$ de H. Soit K le noyau de l'application

$$A^r \to H,\ (a_1, \ldots, a_r) \mapsto \sum_i a_i \tilde{e}_i. \tag{111}$$

Pour $0 \neq h = \sum_i a_i \tilde{e}_i \in K \subset H$, on doit avoir

$$\nabla h = \sum_i a_i \nabla \tilde{e}_i + \sum_i da_i \otimes \tilde{e}_i = 0 \text{ dans } H \otimes \Omega_{A/\mathbb{C}}.$$

Soit s le plus petit ordre d'annulation d'un coefficient a_i associé comme ci-dessus à un élément $h \in K$. Alors on a $s \neq 0$ car l'application (111) induit un isomorphisme après tensorisation par $\mathbb{C}$, et donc $da_i \neq 0$. Or $da_i = b_i dt$, où b_i s'annule à un ordre $< s$. On obtient donc une contradiction, et on conclut donc que $K = 0$. ∎

Or on a par ailleurs la suite spectrale associée à la filtration de Hodge sur le complexe de de Rham relatif. Le terme $E_1^{p,q}$ est $R^q \pi_* \Omega^p_{\mathcal{X}/S}$. Comme H admet une filtration dont les gradués sont les $E_\infty^{p,q}$ qui sont eux-mêmes des quotients de sous-objets de $E_1^{p,q}$, on trouve donc que

$$l(H) = rang(H_{|0})l(A) \leq \sum_{p+q=k} l(E_1^{p,q}). \tag{112}$$

Par ailleurs, on a aussi

$$l(E_1^{p,q}) = l(R^q\pi_*\Omega^p_{\mathcal{X}/S}) \leq l(A)rang(H^q(X,\Omega^p_X)), \tag{113}$$

avec égalité si et seulement si $E_1^{p,q}$ est localement libre, comme le montre le théorème 13.3.

Comme X est kählérienne, on a aussi, par dégénérescence en E_1 pour X,

$$rang(H_{|0}) = \sum_{p+q=k} rang H^q(X,\Omega^p_X), \tag{114}$$

et en combinant ceci avec (112) et (114), on obtient que l'égalité a lieu dans (113) et donc que $R^q\pi_*\Omega^p_{\mathcal{X}/S}$ est localement libre.

■

Références

[1] Yves André. *Une introduction aux motifs*, SMF, Panoramas et Synthèses 17 (2004).

[2] S. Bloch. Semi-regularity and de Rham cohomology, Inventiones Math. 17, 51-66 (1972).

[3] A. Borel, J.-P. Serre.Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck), Bull. Soc. Math. France 86 (1959), 97-136.

[4] P. Deligne, L. Illusie. Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham, Invent. Math. 89 (1987), no. 2, 247–270.

[5] W. Fulton. *Intersection Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, Band 2, Berlin-Heidelberg, Springer Verlag, 1984

[6] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, Graduate texts in Mathematics 52, Springer (1977).

[7] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, 2nd ed, Benjamin/Cummings, Reading, MA (1980).

[8] D. Mumford, F. Kirwan, J. Forgarty. *Geometric invariant theory*, 3ème édition modifiée, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34, Springer

[9] J.-P. Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier 6, (1956) 1-42.

[10] J.-P. Serre. Faisceaux algébriques cohérents, Ann. Math. 61, 197-278.

[11] E. Viehweg. *Quasi-Projective Moduli for Polarized Manifolds* , Springer.

[12] C. Voisin. *Hodge theory and complex algebraic geometry I et II*, Cambridge University Press 2002, 2003, en français *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés, SMF 2003.